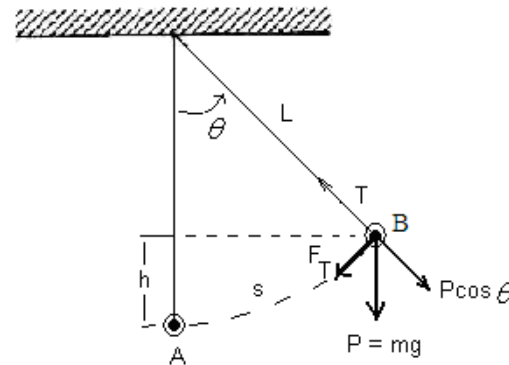
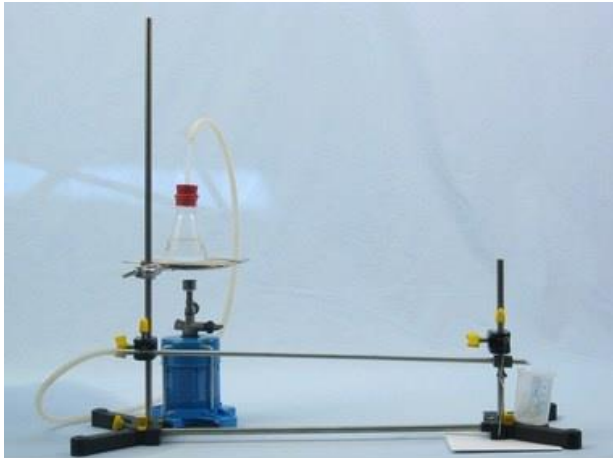


Teoria de erros

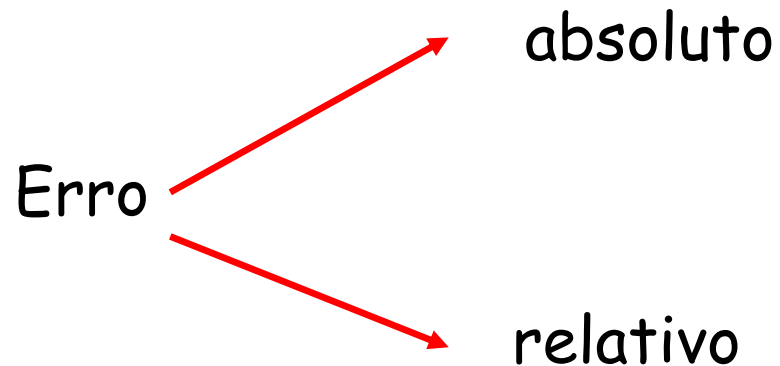


Prof. Thiago Santos



Erro (ϵ)

- Uma medição, em geral, tem imperfeições que dão origem a um erro (ϵ) no resultado da medição.
- Erro (na prática): Resultado da medição menos o valor verdadeiro da grandeza física.



$$\epsilon_{abs} = x_{medido} - x_{verdadeiro}$$

$$\epsilon_{rel} = \frac{\epsilon_{abs}}{x_{verdadeiro}}$$

Pode ser expresso em %

Erros grosseiros, sistemáticos e aleatórios

- Erros grosseiros: Ocorrem devido à falta de prática (imperícia) ou distração do operador.
 - Ex:
 - Escolha errada de escalas
 - Erros de cálculo
- Erros sistemáticos: São causados por fontes identificáveis e, em princípio, podem ser eliminados ou compensados. Estes fazem com que as medidas feitas estejam consistentemente acima ou abaixo do valor real, prejudicando a exatidão da medida.
 - Ex:
 - Intervalo de tempo medido com um relógio que atrasa (aparelho)
 - Medir o instante de tempo da ocorrência de um relâmpago pelo ruído do trovão associado (método)

Erros grosseiros, sistemáticos e aleatórios

- Erros sistemáticos: São causados por fontes identificáveis e, em princípio, podem ser eliminados ou compensados. Estes fazem com que as medidas feitas estejam consistentemente acima ou abaixo do valor real, prejudicando a exatidão da medida.
 - Ex:
 - Intervalo de tempo medido com um relógio que atrasa (aparelho)
 - Medir o instante de tempo da ocorrência de um relâmpago pelo ruído do trovão associado (método)
 - Medida do comprimento de uma barra de metal, que pode depender da temperatura ambiente (efeitos ambientais)
 - Não incluir o efeito da resistência do ar numa medida da aceleração da gravidade baseada na medida do tempo de queda de um objeto a uma dada altura (simplificações do modelo teórico utilizado)

Erros grosseiros, sistemáticos e aleatórios

- Erros aleatórios: São devidos a causas diversas e incoerentes, bem como a causas temporais que variam durante observações sucessivas e que escapam a uma análise em função de sua imprevisibilidade
 - Possíveis causas
 - Instrumentos de medida
 - Pequenas variações das condições ambientais (pressão, temperatura, umidade, fonte de ruídos, etc.)
 - Fatores relacionados ao próprio observador que estão sujeitos a flutuação (visão e audição, p.ex.)

Incertezas

- A incerteza de uma medição $\underline{u}$ é um parâmetro associado à dispersão de valores que pode ser razoavelmente ser atribuídos ao mensurando.
- Define a dúvida acerca da validade do resultado de uma medição e reflete a falta de conhecimento exato do valor verdadeiro da grandeza física.
- São divididas em duas categorias:
 - Incertezas Tipo A (u_A)
 - Incertezas Tipo B (u_B)

Tipo A

- São estimadas por métodos estatísticos ou aleatórios.
- Uma forma apropriada de representar incertezas que envolvem parâmetros estatísticos é através do conceito de desvio padrão.

Tipo B

- São avaliadas por um julgamento científico, baseadas em todas as variabilidades do mensurando, que não são obtidas por parâmetros estatísticos ou aleatórios.
- As informações podem incluir medidas prévias, experiência ou conhecimento geral das propriedades de materiais e aparelhos.

Precisão e exatidão

- Precisão: Está associada com a capacidade de um instrumento, ou aparelho, de medida avaliar uma grandeza com a menor dispersão estatística e com o maior número de algarismos significativos.
- Descreve a repetibilidade do resultado, ou seja, a concordância de valores numéricos para várias medições.
- A precisão pode ser descrita por variáveis aleatórias, tais como: desvio padrão e variância.

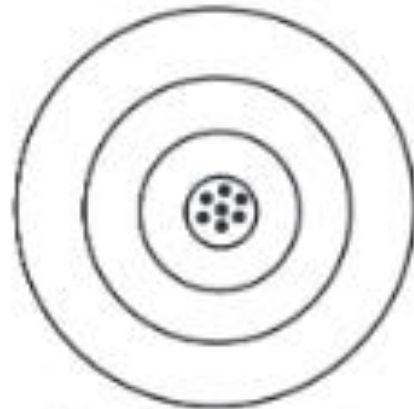
Precisão e exatidão

- Exatidão (ou acurácia): É a capacidade que um aparelho de medida tem de se aproximar, o máximo possível, do valor verdadeiro.
- Para se chegar a um valor próximo do valor verdadeiro, deve-se utilizar um aparelho de precisão, porém o uso de um aparelho preciso não leva, necessariamente, a um valor exato.
 - Ex: Se o instrumento estiver descalibrado, o valor medido, embora preciso, não é o valor verdadeiro.

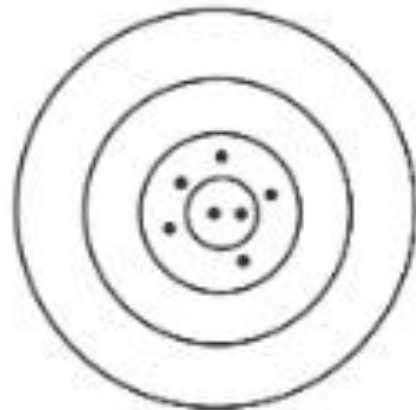
Precisão e exatidão



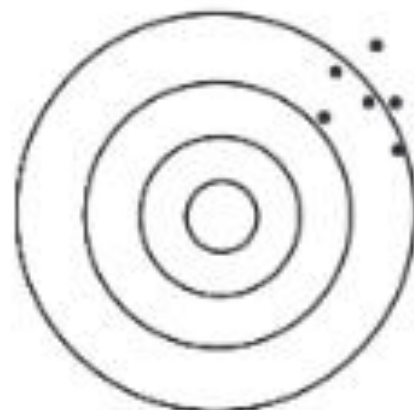
Preciso e inexato



Preciso e exato



Impreciso e exato



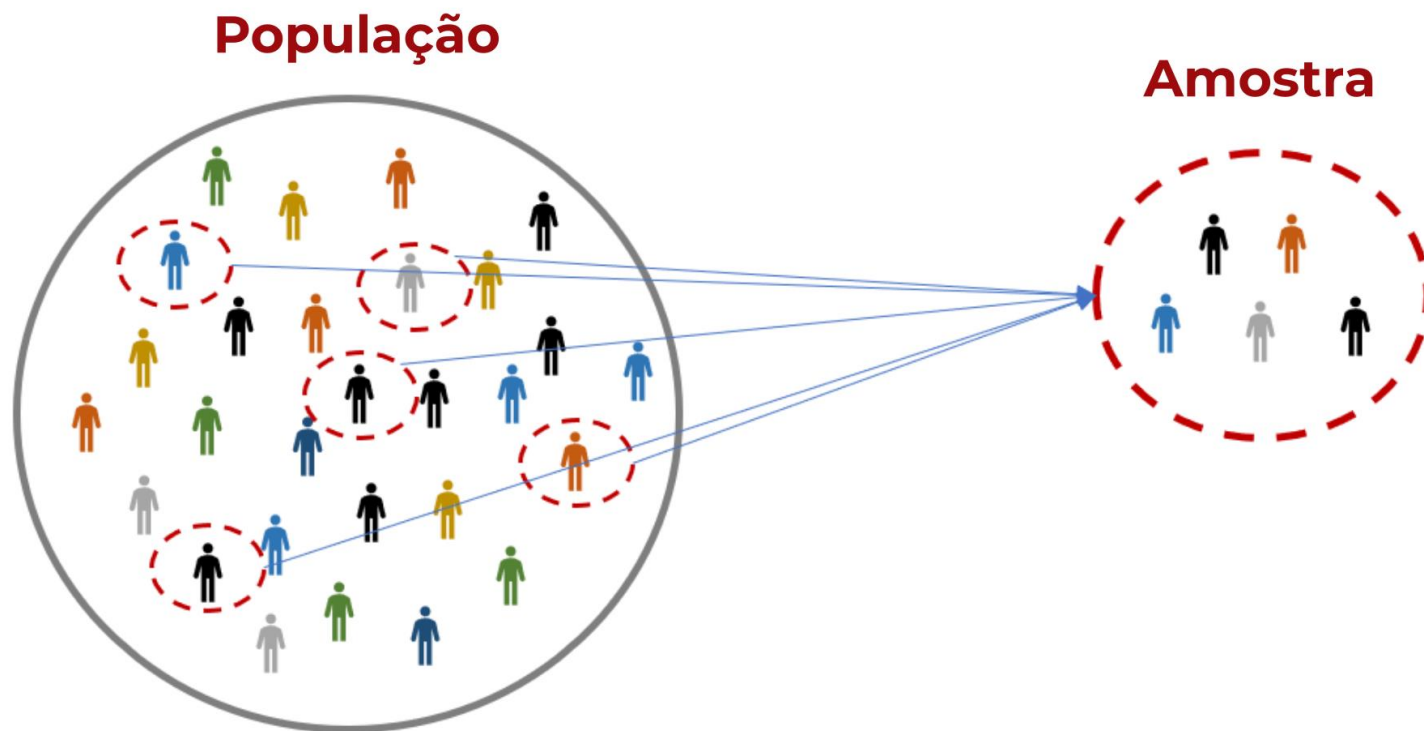
Impreciso e inexato

Precisão e exatidão

- Uma medida com pequeno **erro**, isto é, próxima do valor verdadeiro, é uma medida **exata**.
- Uma medida com pequena **incerteza**, isto é, próxima de um mesmo valor, não necessariamente o valor verdadeiro, é uma medida **precisa**.

Amostra e população

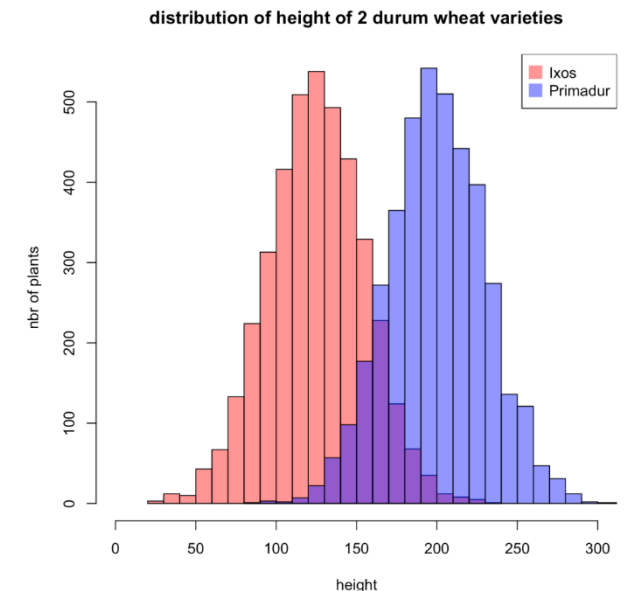
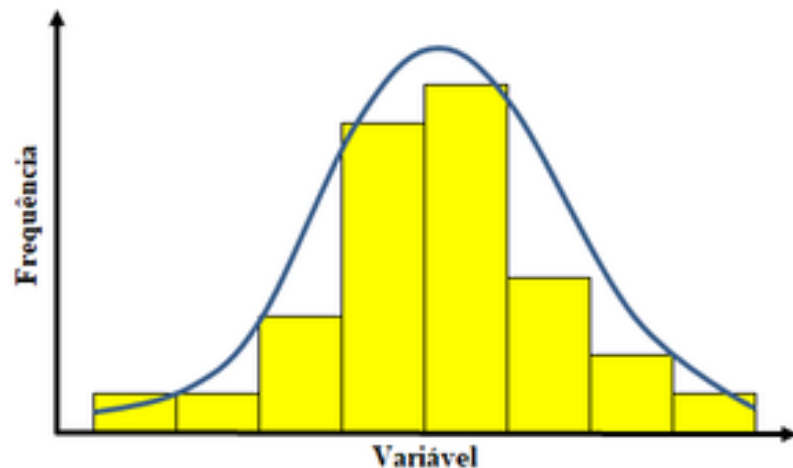
- Amostra: Conjunto de indivíduos retirados de uma população com a finalidade de fornecer informações sobre a população.



- Usa-se inferência estatística para fazer análises com amostras

distribuição estatística

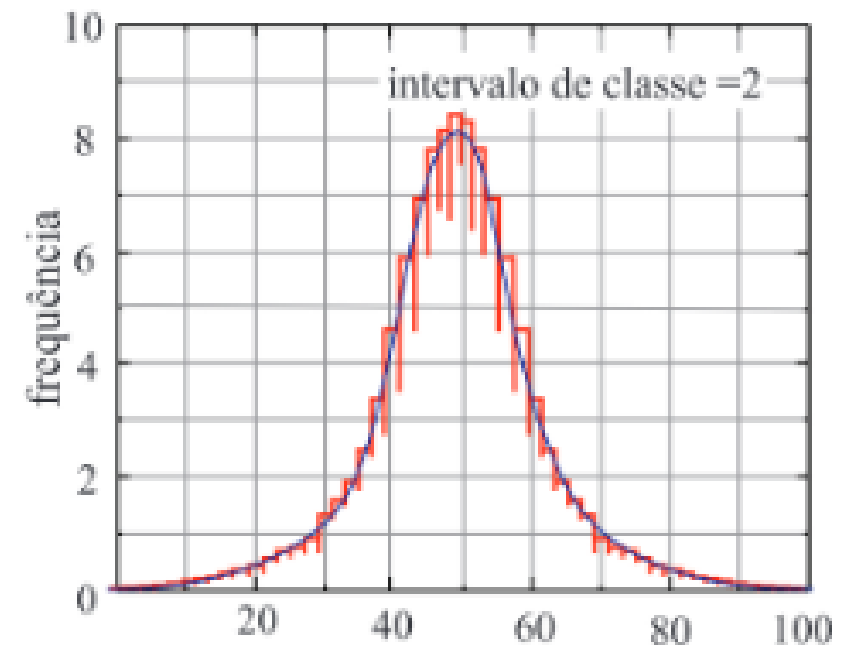
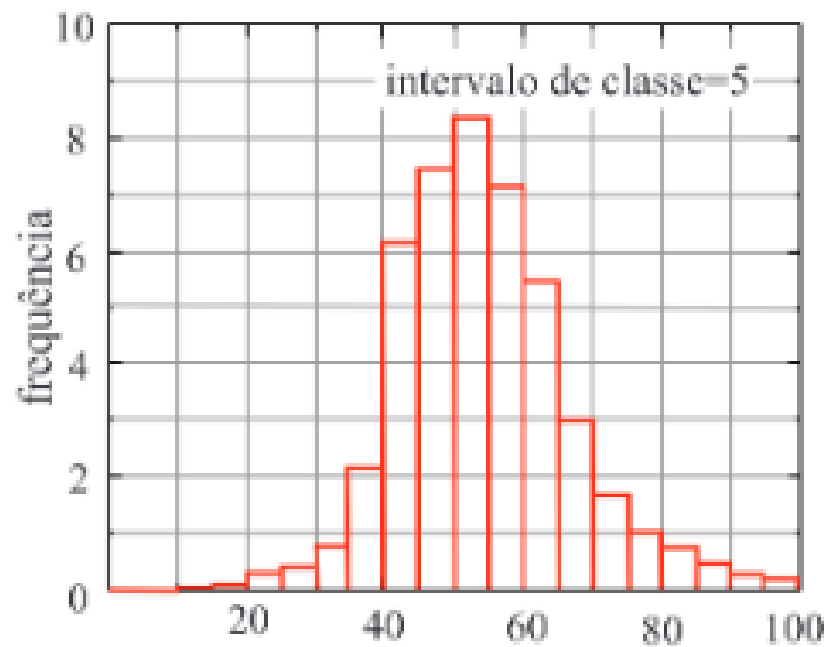
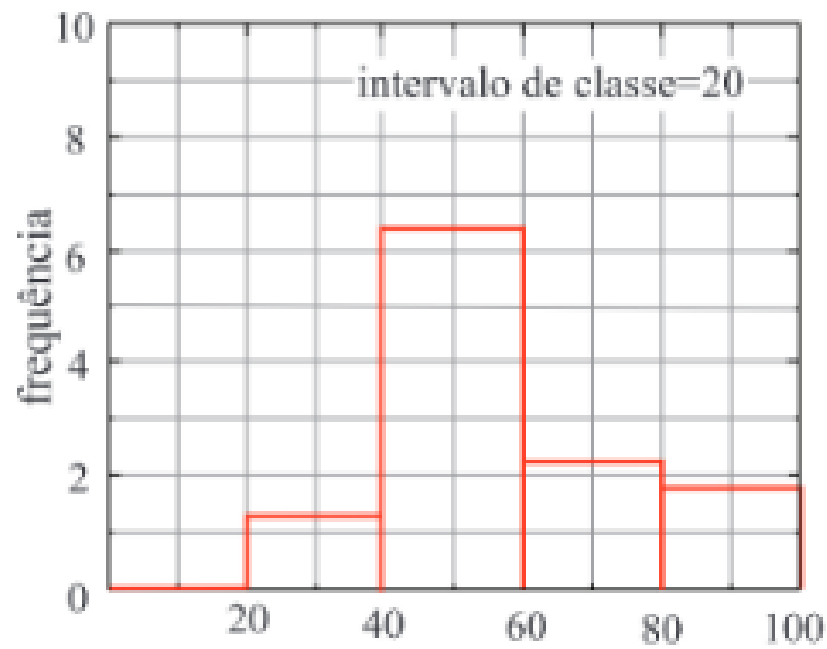
- Dados podem ser organizados e agrupados de acordo com o número de ocorrências (**frequências**), de um determinado valor contido em intervalos de valores (**intervalo de classe**)
- Uma distribuição de frequências em intervalos de classe pode ser apresentada numa forma gráfica conhecida como **histograma**.



distribuição estatística

- Observa-se que o número de intervalos de classe de um histograma cresce quando o número de dados da amostra aumenta proporcionalmente.
- Os intervalos de classe, deste modo, tendem a se estreitar progressivamente, tendendo a zero quando o número de dados tende ao infinito.
- Nessas condições, o histograma transforma-se numa curva suave de distribuição teórica.

distribuição estatística



exemplos de distribuições

- Binomial: Utilizada em situações em que se disponha somente de eventos binários.
 - Ex: Determinação do número de vezes que dão cara ou coroa.
- Poisson: Para eventos que são independentes e que cada um deles não influencia os outros
 - Ex: Determinação do número de automóveis que passam por um determinado ponto de uma avenida por unidade de tempo em diferentes horas do dia.

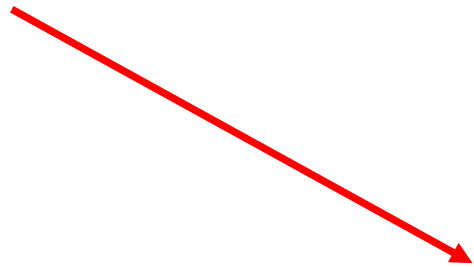
exemplos de distribuições

- Gauss (ou normal): Utilizada em amostras genéricas de grande número de dados ($n > 30$) de uma única população
- T-student: É semelhante à distribuição de Gauss porém que se aplica aos casos de amostras genéricas de qualquer número de dados de uma população.

Valor médio

- Na maioria das vezes, o valor médio (ou média aritmética), de várias medidas diretas independentes de uma mesma grandeza física, que varia aleatoriamente, fornece a melhor estimativa do valor esperado dessa grandeza.

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$$

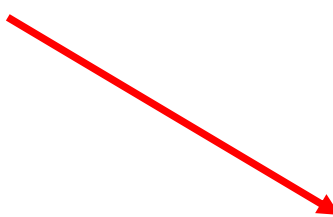


Número total das determinações independentes x_i da mesma grandeza X

Desvio médio

- O desvio médio é definido como sendo a média aritmética das flutuações dos dados individuais em torno do valor médio, num conjunto aleatório de determinações independentes.
- Seu valor fornece, somente, uma estimativa razoável da dispersão dos dados individuais em torno do valor médio.

$$d_m = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \langle x \rangle|}{n}$$



Número total das determinações independentes x_i da mesma grandeza X

Variância

- Seu conceito, em estatística, é usado frequentemente, para descrever um conjunto de observações obtida de uma população (σ^2) ou de uma amostra (S^2).

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2$$

Variância da população

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2$$

Variância da amostra

$\langle x \rangle$ 

Valor médio da população ou da amostra
(a depender da expressão)

Variância

- Quando se lida com **grandes populações** é muito difícil encontrar o valor exato da variância da população.
- Nesses casos, escolhe-se uma **amostra da população** e utiliza-se, então a **variância da amostra**
- É possível combinar as duas expressões anteriores, de modo a relacioná-las

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \sigma^2$$


É usado **n-1** ao invés de **n** para S^2 porque a média da amostra é uma estimativa da média da população (desconhecida)

Exemplo (variância)

Em um certo país, o governo financia um programa de assistência às famílias de baixa renda. Cada família recebe, de cinco em cinco semanas, a quantia de 100 UM(unidades monetárias) para comprar produtos de alimentação em estabelecimentos conveniados.

O coordenador desse projeto selecionou em uma pequena cidade quatro famílias e acompanhou a distribuição dos gastos, conforme mostrado na tabela a seguir:

	1ª semana	2ª semana	3ª semana	4ª semana	5ª semana	Total (valor do benefício)
Família I	20 UM	20 UM	20 UM	20 UM	20 UM	100 UM
Família II	20 UM	24 UM	20 UM	16 UM	20 UM	100 UM
Família III	12 UM	28 UM	24 UM	20 UM	16 UM	100 UM
Família IV	36 UM	32 UM	20 UM	8 UM	4 UM	100 UM

Exemplo (variância)

- O comportamento de cada família em relação a seus gastos é diferente.
- Usar a **variância** para observar a variação destes gastos em relação a média.

$$\langle x \rangle = \frac{100}{5} = 20 \text{ UM (para todos)}$$

$$\sigma^2_{fam\ 1} = \frac{(20 - 20)^2 + (20 - 20)^2 + (20 - 20)^2 + (20 - 20)^2 + (20 - 20)^2}{5} = 0$$

$$\sigma^2_{fam\ 2} = \frac{(20 - 20)^2 + (24 - 20)^2 + (20 - 20)^2 + (16 - 20)^2 + (20 - 20)^2}{5} = 6,4 \text{ UM}^2$$

$$\sigma^2_{fam\ 3} = \frac{(12 - 20)^2 + (28 - 20)^2 + (24 - 20)^2 + (20 - 20)^2 + (16 - 20)^2}{5} = 32 \text{ UM}^2$$

$$\sigma^2_{fam\ 4} = \frac{(36 - 20)^2 + (32 - 20)^2 + (20 - 20)^2 + (8 - 20)^2 + (4 - 20)^2}{5} = 160 \text{ UM}^2$$

Desvio Padrão

- A unidade de **variância**, neste caso, é **UM²**, enquanto a unidade da **média** é **UM**.
- É necessária a uniformização das unidades. Para isso, devemos discutir o conceito de desvio padrão.

O **desvio padrão** (ou desvio médio quadrático), caracteriza a dispersão dos dados individuais em torno do valor médio, num conjunto aleatório de *n* determinações independentes

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n}}$$

Desvio padrão populacional

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n - 1}}$$

Desvio padrão amostral

Exemplo anterior

- Se compararmos variância com o desvio padrão:

$$\sigma^2_{fam\ 1} = 0 \rightarrow \sigma = 0$$

$$\sigma^2_{fam\ 2} = 6,4\ UM^2 \rightarrow \sigma \cong 2,53\ UM$$

$$\sigma^2_{fam\ 3} = 32\ UM^2 \rightarrow \sigma \cong 5,66\ UM$$

$$\sigma^2_{fam\ 4} = 160\ UM^2 \rightarrow \sigma \cong 12,65\ UM$$

Exercício 1

A tabela seguinte informa a participação percentual dos estados da região Nordeste no produto interno bruto (PIB) nacional.

Alagoas	0,9%	Maranhão	1,0%	Piauí	0,5%
Bahia	4,4%	Paraíba	0,7%	Rio Grande do Norte	0,9%
Ceará	1,8%	Pernambuco	2,3%	Sergipe	0,5%

- a) Calcule a média e o desvio padrão dos percentuais acima.
- b) Quantos estados têm participação pertencente ao intervalo $\left[\langle x \rangle - \right.$

Fazendo no Excel

dados	
2	=var
3	VAR.A
4	VAR.P
5	VARA
6	VARPA
	VAR
	VARP
	BDVAREST
	BDVARP
	COVARIACÃO.P
	COVARIACÃO.S
	COVAR

Estima a variação com base em uma amostra (ignora valores lógicos e texto na amostra)

dados	
2	=var
3	VAR.A
4	VAR.P
5	VARA
6	VARPA
	VAR
	VARP
	BDVAREST
	BDVARP
	COVARIACÃO.P
	COVARIACÃO.S
	COVAR

Calcula a variação com base na população total (ignora valores lógicos e texto da população)

Fazendo no Excel

<i>dados</i>	
2	=desv
3	 DESV.MÉDIO
4	 DESVPAD.A
5	 DESVPAD.P Calcula o desvio padrão com base na população total determinada como argumento (ignora valores lógicos e texto)
6	 DESVPADA
	 DESVPADPA
	 DESVQ
	 DESVPAD
	 DESVPADP
	 BDESVPA

Exercício 2

Observe os dados apresentados pelo gráfico

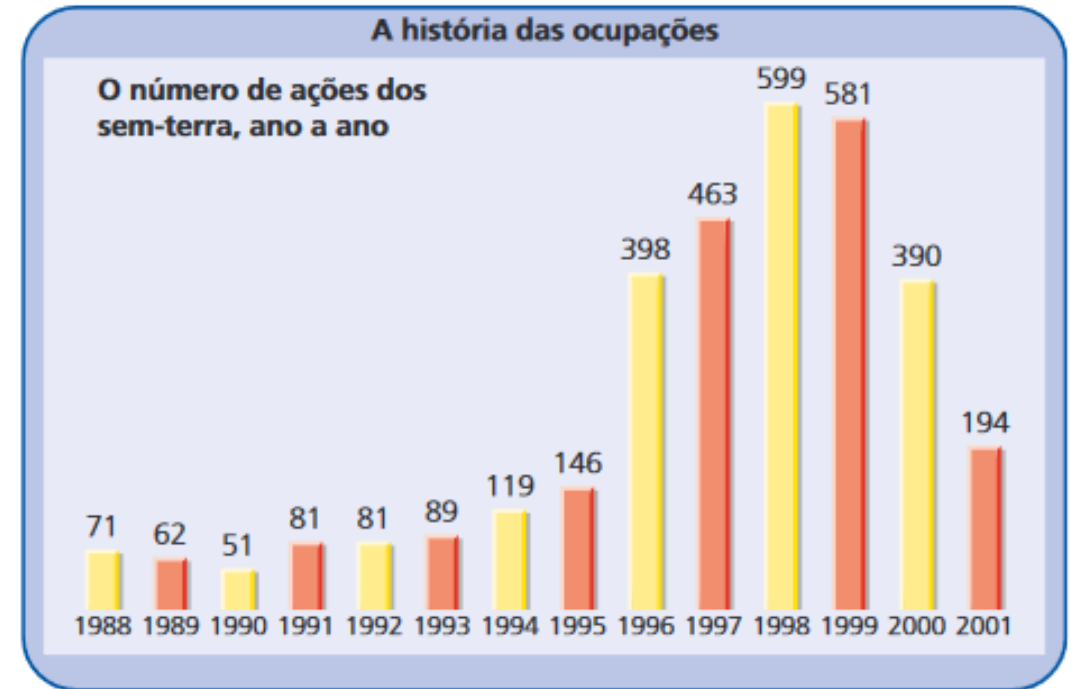
a) Encontre o desvio padrão correspondente ao número anual de ações registradas no período de 1988 a 2001

b) Considere os períodos

I- 1988 - 1993

II - 1996 - 2000

Calcule o desvio padrão correspondente a cada período. Observe e compare os resultados com os obtidos no item a.



Propagação de incertezas

- Além do efeito individual de cada fonte de incerteza (Tipo A ou Tipo B), sobre o processo de medição, é importante definir uma estimativa geral que incorpore todas as fontes de incerteza do mensurando.
- Essa estimativa se refere a uma **incerteza combinada (u_c)** e sua representação depende da correlação entre as fontes de incerteza do mensurando.
- Se essas fontes de incerteza são não correlacionadas, são ditas **estatisticamente independentes**. Caso contrário, são **estatisticamente dependentes**.

Propagação de incertezas

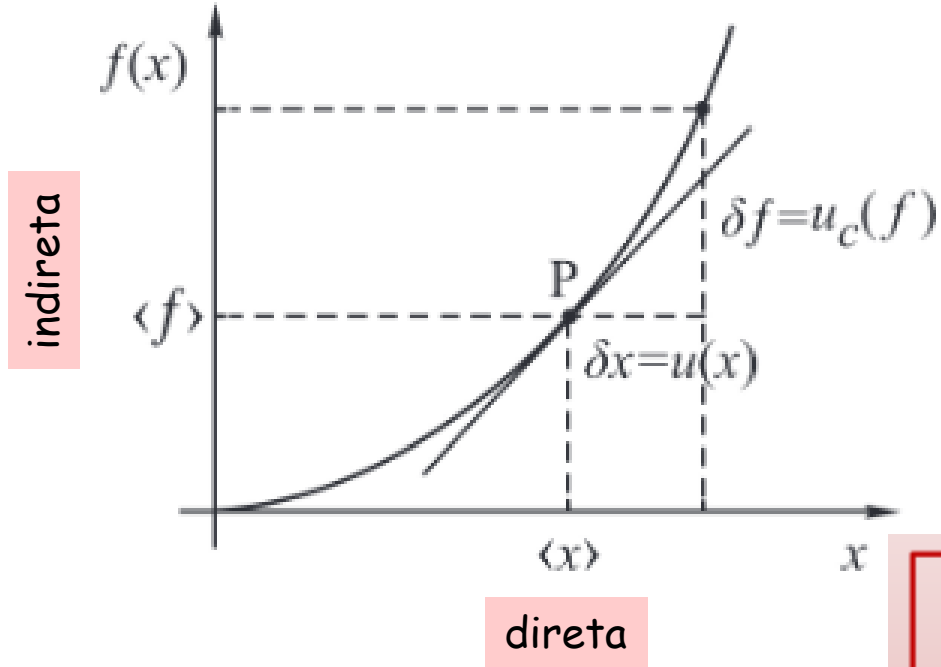
- Na prática, observa-se que a maioria dos mensurandos possuem fontes de incertezas estatisticamente independentes.
- A avaliação de uma incerteza combinada pode ser feita analisando os casos onde a medida de uma grandeza física de interesse é feita de maneira indireta, ou seja, é obtida a partir da medida de uma ou mais grandezas físicas diretas.
- Assim, as incertezas individuais de cada **grandeza física direta** (**grandezas de entrada**) se propagam para a **grandeza física indireta** (**grandezas de saída**)



Propagação de incerteza

Relação entre as grandezas direta e indireta

- Considerando uma grandeza indireta $\underline{f}$ em função de uma grandeza direta $\underline{x}$:



$$u_c(f) \approx \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\langle x \rangle} u(x)$$

REGRA GERAL

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_N} \Delta x_N \right)^2}.$$

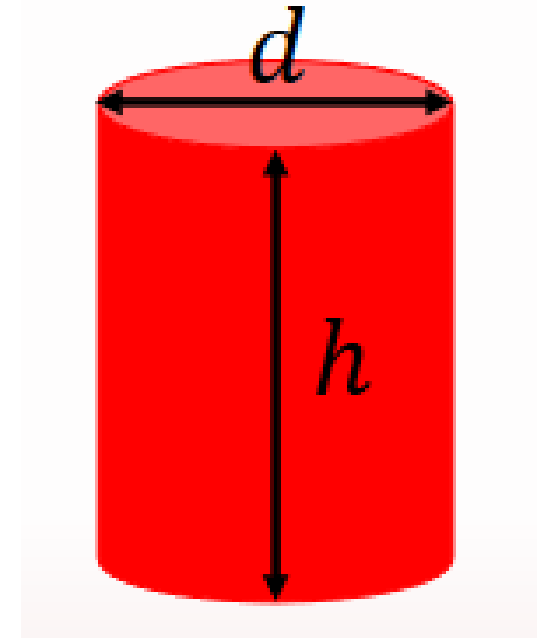
Exemplo: volume de um cilindro

As dimensões de um cilindro foram medidas com uma régua graduada em milímetros, onde:

$$d = (21,35 \pm 0,05) \times 10^{-2} m;$$

$$h = (28,50 \pm 0,05) \times 10^{-2} m;$$

Determinar o volume do cilindro, bem como sua respectiva incerteza.

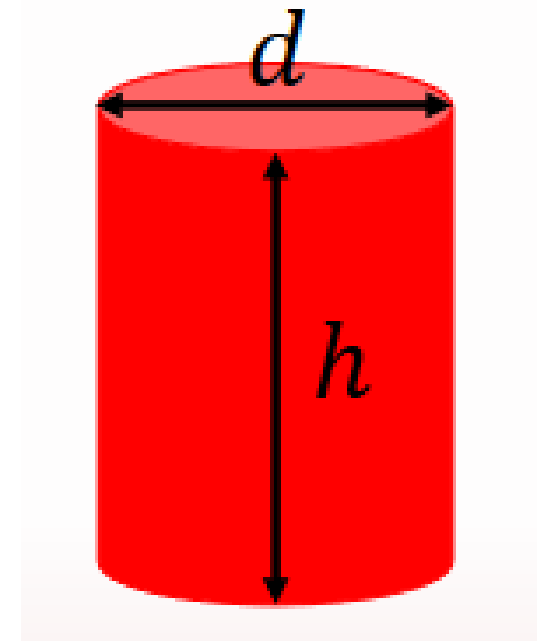


Exemplo: volume de um cilindro

$$V_{cil} = \pi r^2 h = \pi \frac{d^2}{4} h$$

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_N} \Delta x_N\right)^2}.$$

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial d} u_d\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h} u_h\right)^2}$$



Exemplo: volume de um cilindro

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial d} u_d\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h} u_h\right)^2}$$

$$u_d = 5 \times 10^{-4} m$$

$$d = (21,35 \pm 0,05) \times 10^{-2} m;$$

$$h = (28,50 \pm 0,05) \times 10^{-2} m.$$

$$u_h = 5 \times 10^{-4} m$$

Exemplo: volume de um cilindro

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{\pi d h}{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{\pi d h}{2} u_d\right)^2 + \left(\frac{\pi d^2}{4} u_h\right)^2}$$

Divida cada um dos termos
por V

$$\frac{\partial V}{\partial d} \cdot \frac{1}{V} = \frac{\pi d h}{2} \frac{4}{\pi d^2 h} = \frac{2}{d}$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{1}{V} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{4}{\pi d^2 h} = \frac{1}{h}$$

Exemplo: volume de um cilindro

$$d = 21,35 \text{ m}$$

$$h = 28,50 \text{ m}$$

$$u_d = u_h = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$$

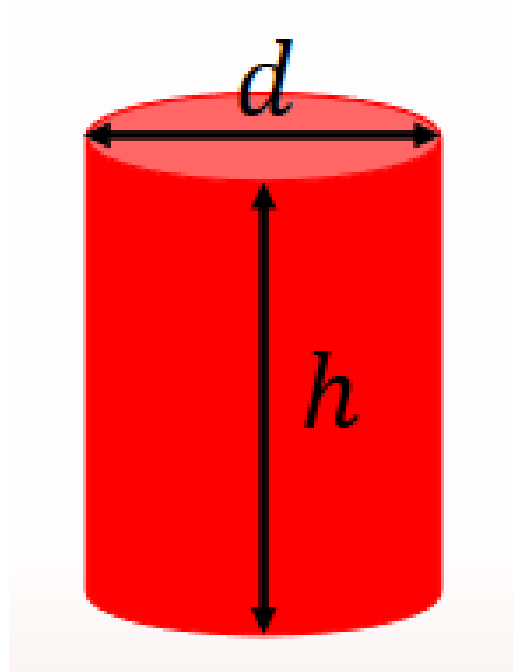
$$u_V = \sqrt{\left(\frac{\pi d h}{2} u_d\right)^2 + \left(\frac{\pi d^2}{4} u_h\right)^2}$$

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{2V}{d} u_d\right)^2 + \left(\frac{V}{h} u_h\right)^2}$$

$$u_V = V \sqrt{\left(\frac{2}{d} u_d\right)^2 + \left(\frac{1}{h} u_h\right)^2}$$

Exemplo: volume de um cilindro

$$V = 1,019789 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$



$$\Delta V = u_V = 5,1 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$V = (1019,8 \pm 5,1) \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

Gráficos

Gráficos

Fornecida uma tabela com dados de duas grandezas físicas que se relacionam, a construção de um gráfico nos auxilia a:

- I. Visualizar de forma direta e rápida a relação entre as grandezas ;
- II. Interpretar o fenômeno físico em questão;
- III. Obter informações quantitativas a partir da análise gráfica;

Exemplo: Tensão x Corrente

Dados de tensão (V) e corrente (i) para aferição da resistência elétrica (R) de um elemento resistivo ôhmico

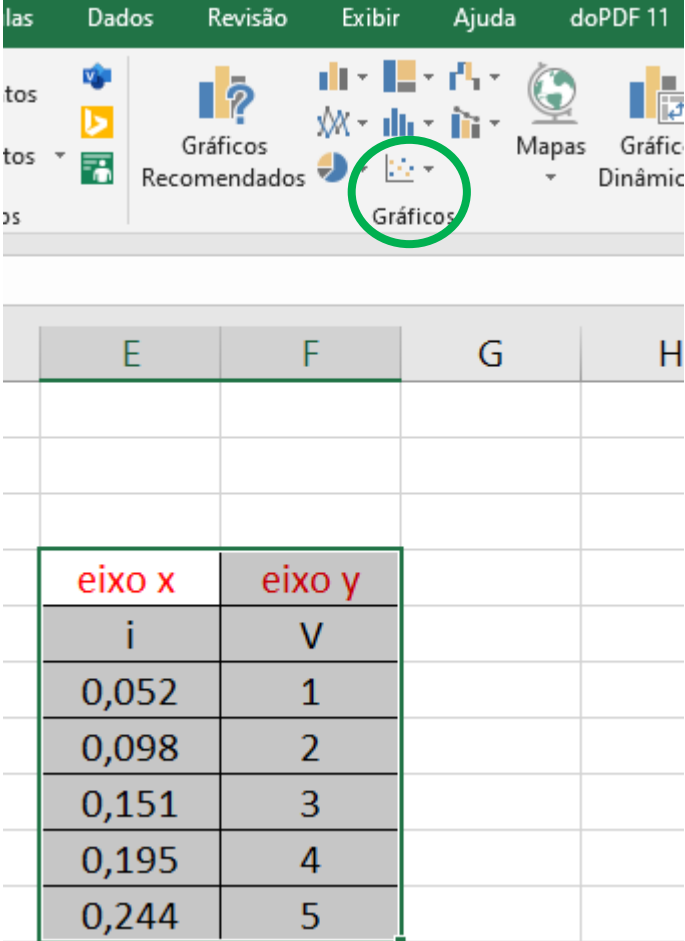
Tensão ($\pm 0,1$ V)	Corrente ($\pm 0,001$ A)
1,0	0,052
2,0	0,098
3,0	0,151
4,0	0,195
5,0	0,244

Exemplo: Tensão x Corrente

- As grandezas são relacionadas pela expressão

$$V = Ri$$

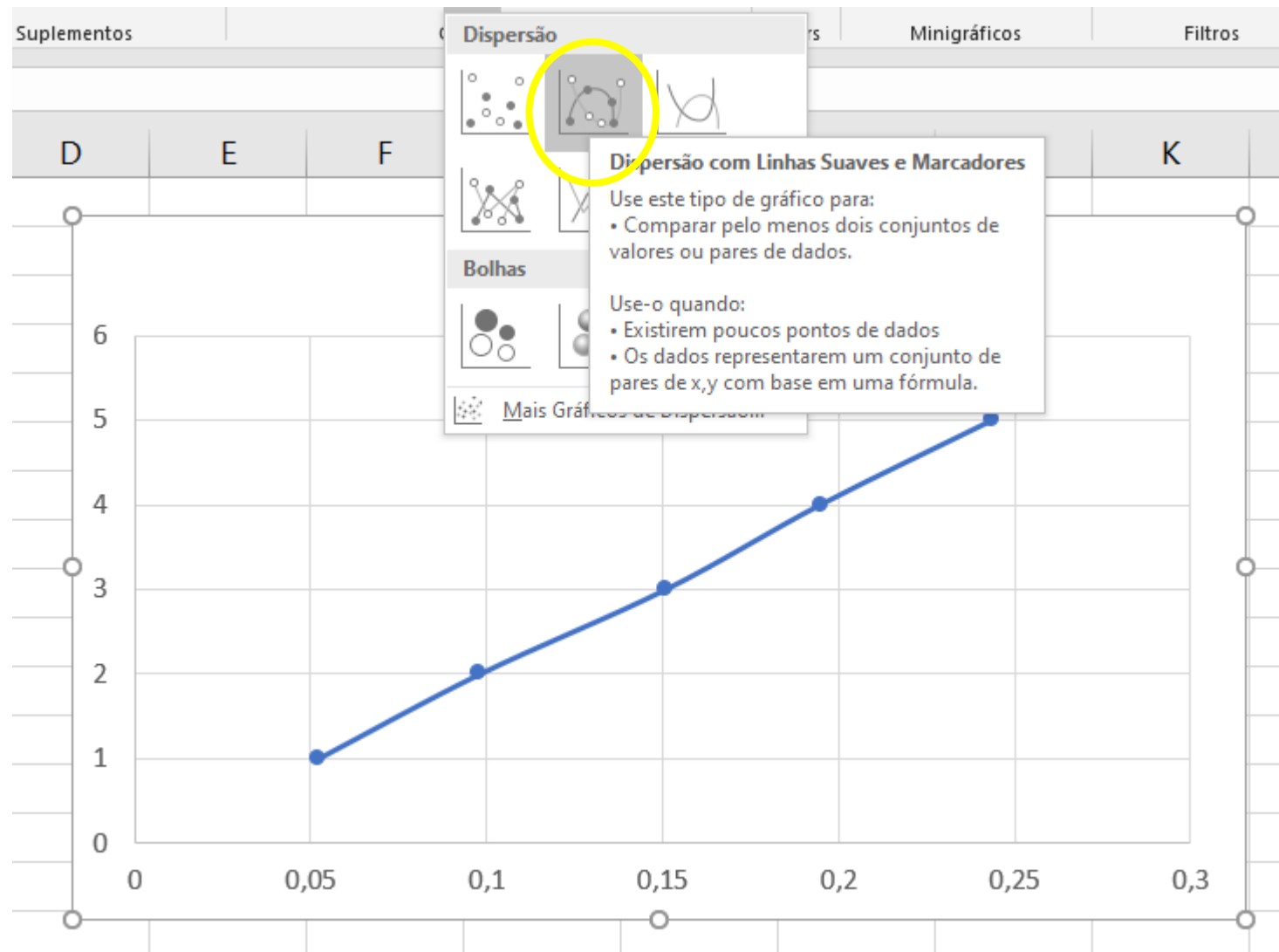
- Construindo o gráfico via Excel:



The image shows a screenshot of the Microsoft Excel interface. The 'Gráficos' (Charts) ribbon is active, and the 'Gráficos' button is circled in green. Below the ribbon, a data table is visible with two columns: 'eixo x' (x-axis) and 'eixo y' (y-axis). The data points are as follows:

eixo x	eixo y
i	V
0,052	1
0,098	2
0,151	3
0,195	4
0,244	5

Exemplo: Tensão x Corrente



Exemplo: Tensão x Corrente



Ajuste de curvas

Ajuste de curvas

- Ajustar uma curva a um conjunto de dados experimentais é determinar uma função $y(x)$ que melhor representa a tendência geral desses dados
- Através do ajuste obtemos informações quantitativas do fenômeno físico em estudo, determinando os parâmetros da curva $y(x)$ que mais se aproxima dos pontos experimentais.
- Exemplos:

polinomiais

Linear

$$y = ax + b$$

Parâmetros (a, b)

Quadrática

$$y = ax^2 + bx + c$$

Parâmetros (a, b, c)

Exponencial

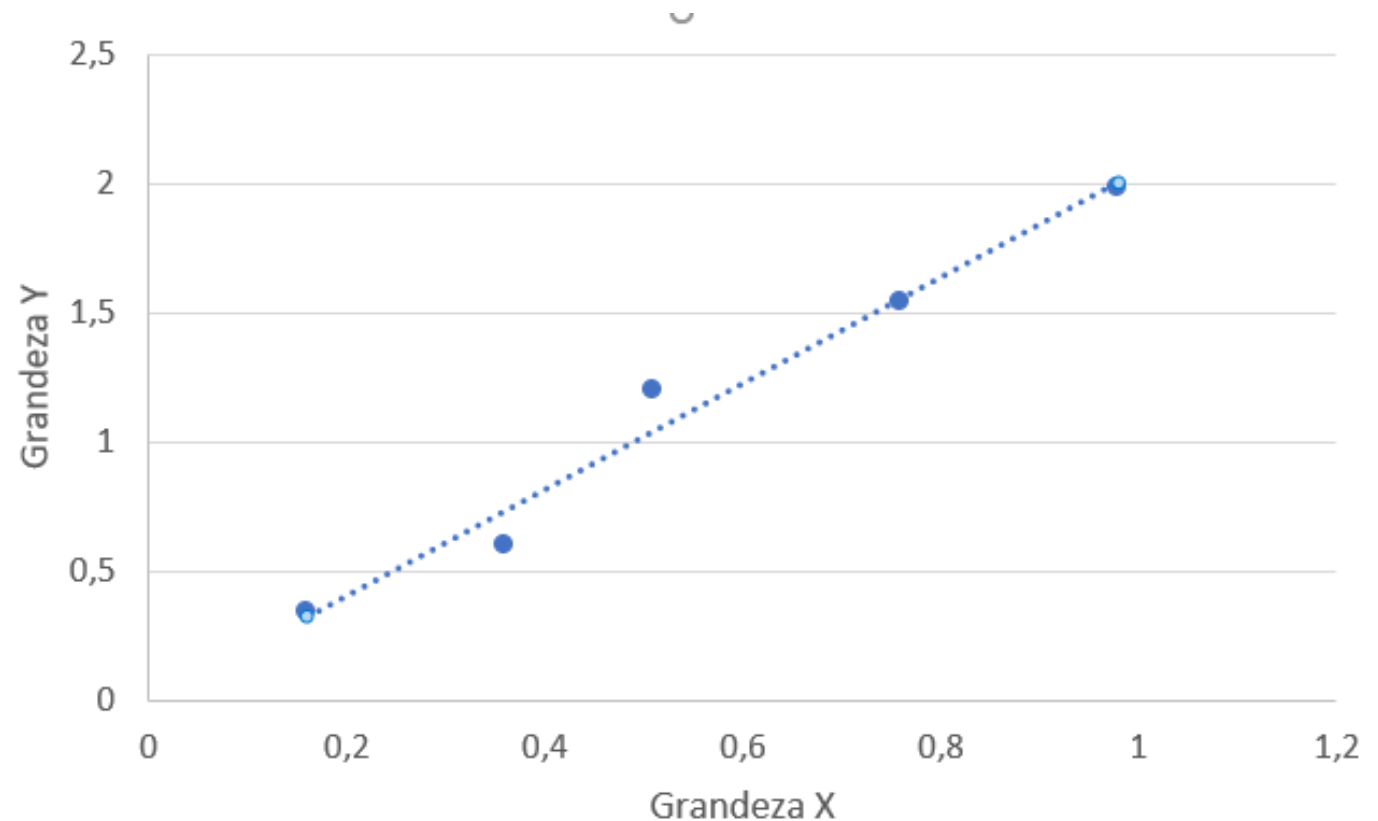
$$y = ae^{bx}$$

Parâmetros (a, b)

Ajuste de curvas

- Suponha que em um experimento foram medidos valores de duas grandezas físicas X e Y que se relacionam linearmente, ou seja, $Y = KX$ (K = constante)

Y	X
0,34	0,16
0,6	0,36
1,2	0,51
1,54	0,76
1,98	0,98



Como fazer um ajuste?

Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

- Minimiza a discrepância entre os dados (x_i, y_i) e os pontos da curva obtida $(x_i, Ax_i +$

$$\zeta = \sum_{i=1}^m (y_i - Ax_i - B)^2$$

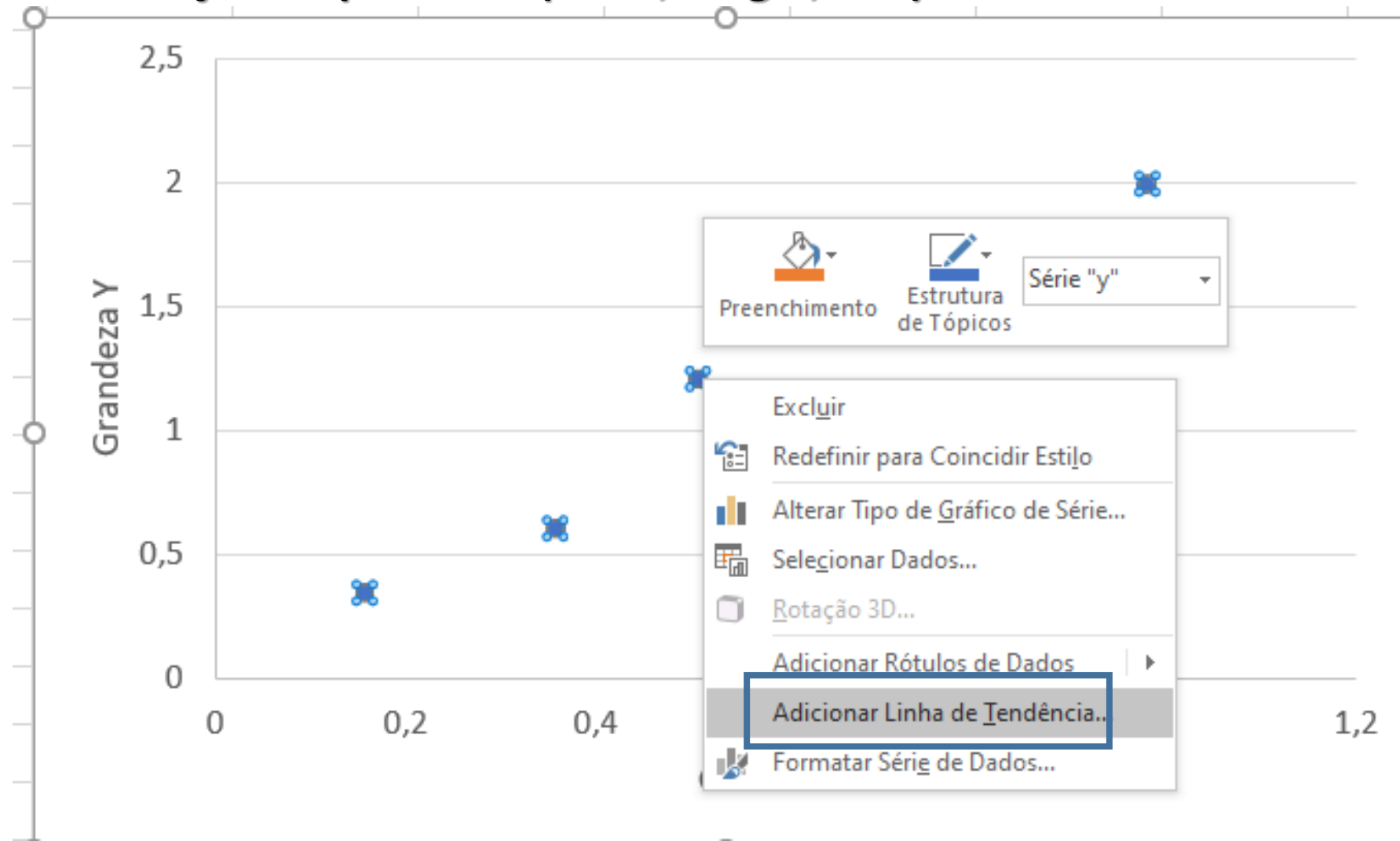
- Para determinar os parâmetros A e B, fazemos

$$\frac{\partial \zeta}{\partial A} = -2 \sum_{i=1}^m (y_i - Ax_i - B)x_i = 0$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial B} = -2 \sum_{i=1}^m (y_i - Ax_i - B) = 0$$

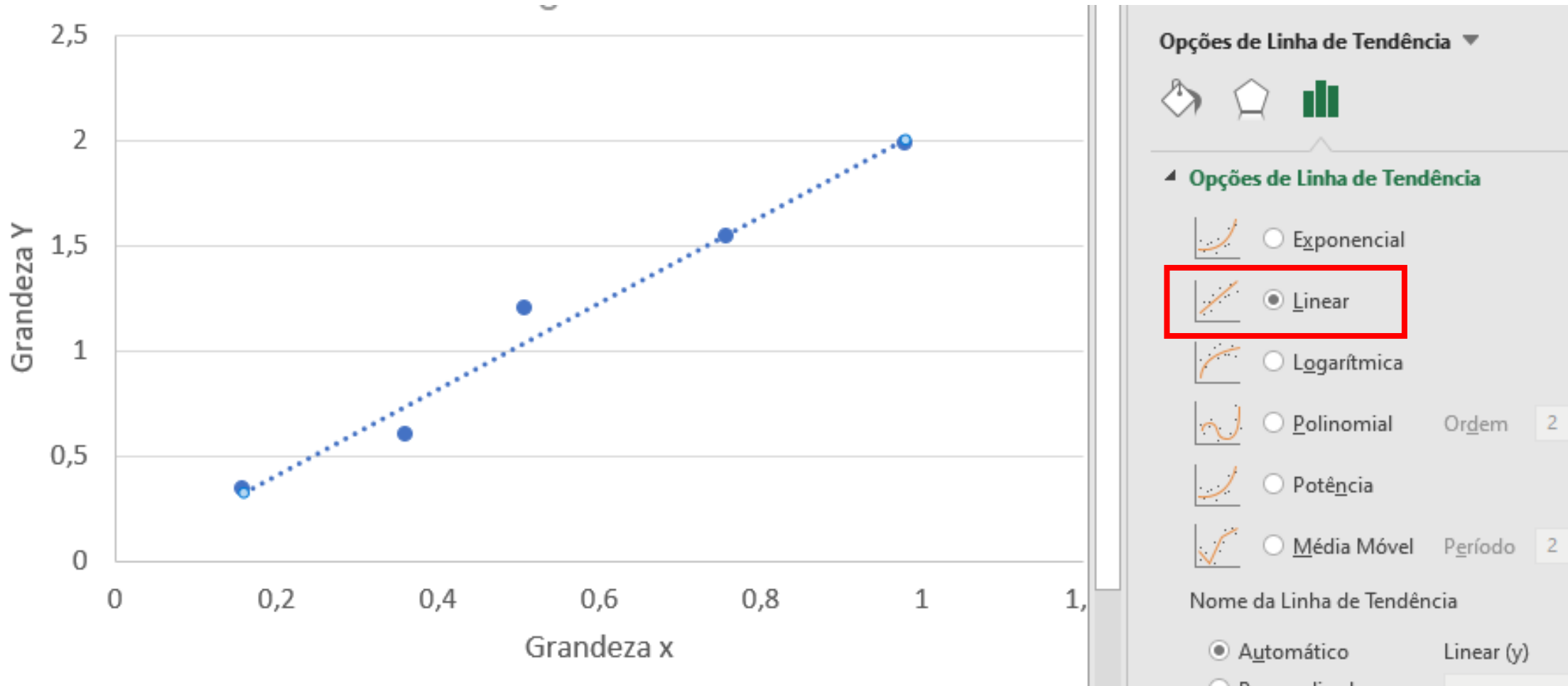
Como fazer um ajuste?

Via software de edição de planilhas (Excel, Origin, etc.)



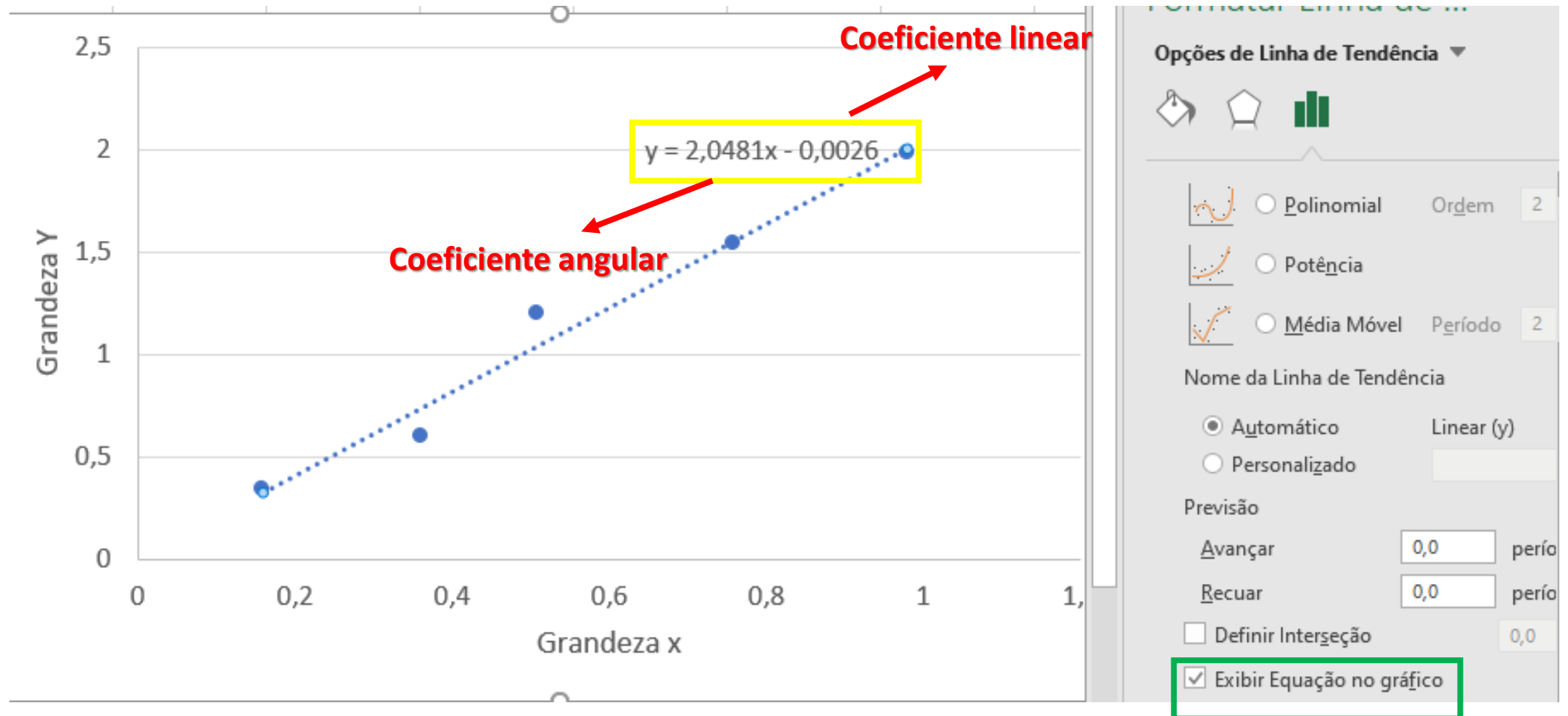
Como fazer um ajuste?

Via software de edição de planilhas (Excel, Origin, etc.)



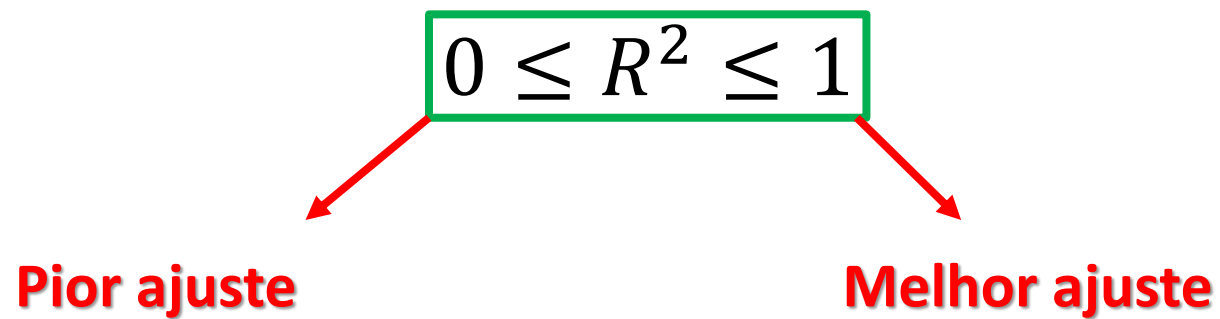
Como fazer um ajuste?

Via software de edição de planilhas (Excel, Origin, etc.)

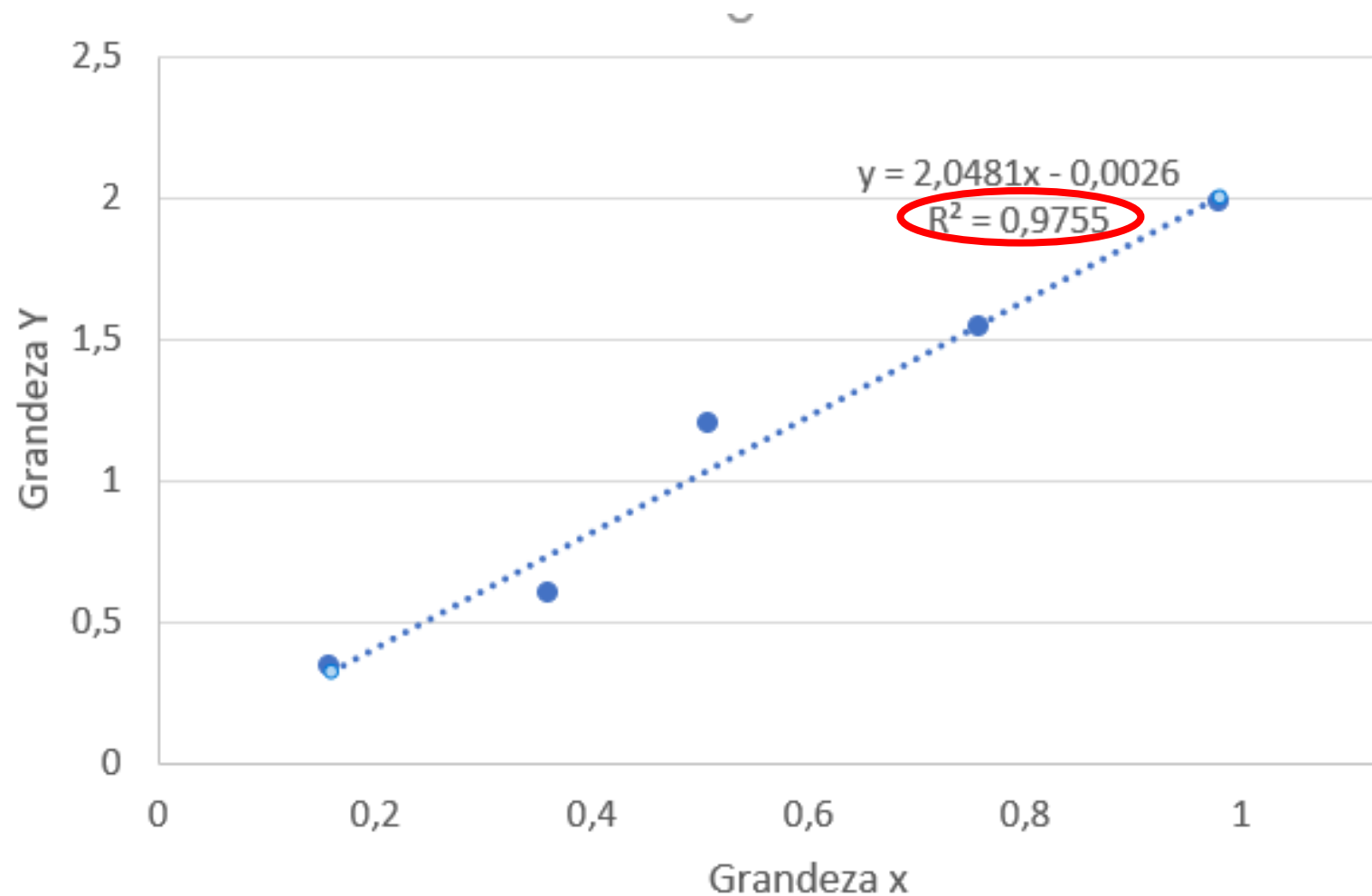


Mas como saber se o ajuste é adequado?

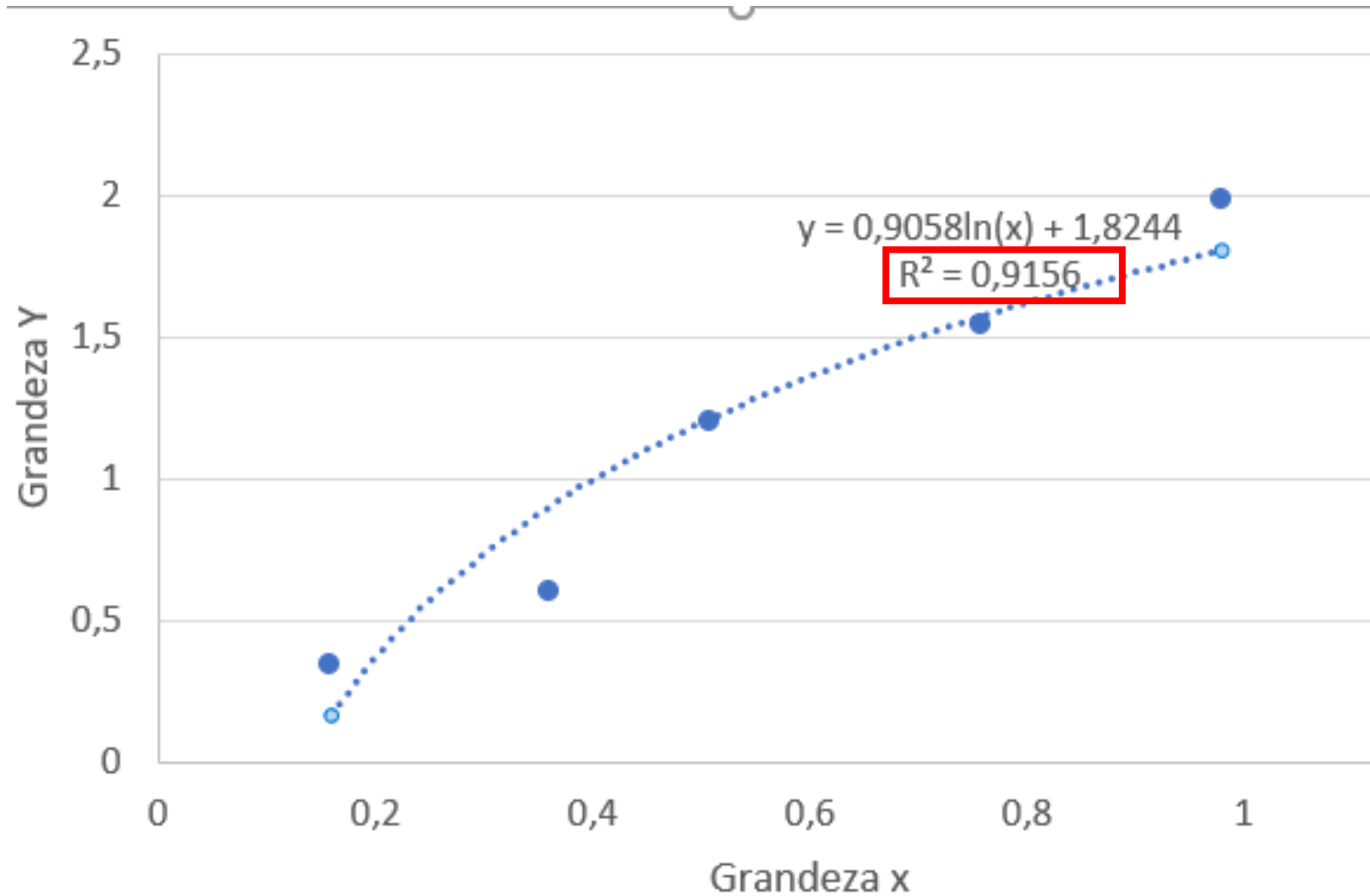
- Usar R^2 (R-quadrado) – Coeficiente de Determinação
 - R^2 : Determina o quão razoável é o ajuste realizado



Como fazer um ajuste?



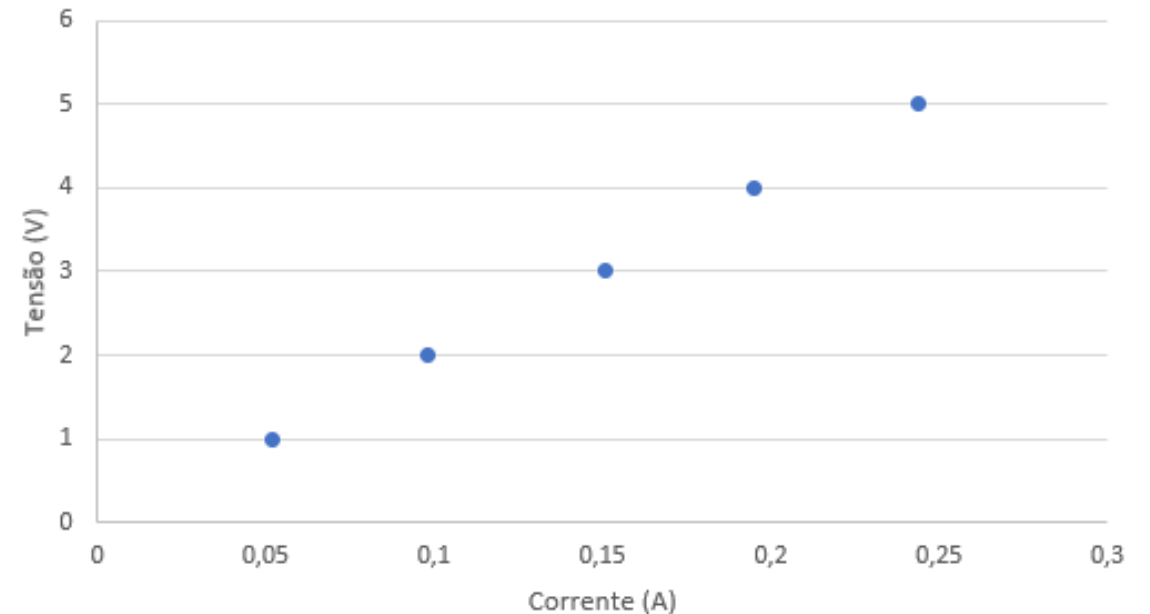
Como fazer um ajuste?



Voltando ao exemplo tensão x corrente

- Como obter a resistência a partir da análise do gráfico $V \times i$?

Tensão ($\pm 0,1$ V)	Corrente ($\pm 0,001$ A)
1,0	0,052
2,0	0,098
3,0	0,151
4,0	0,195
5,0	0,244

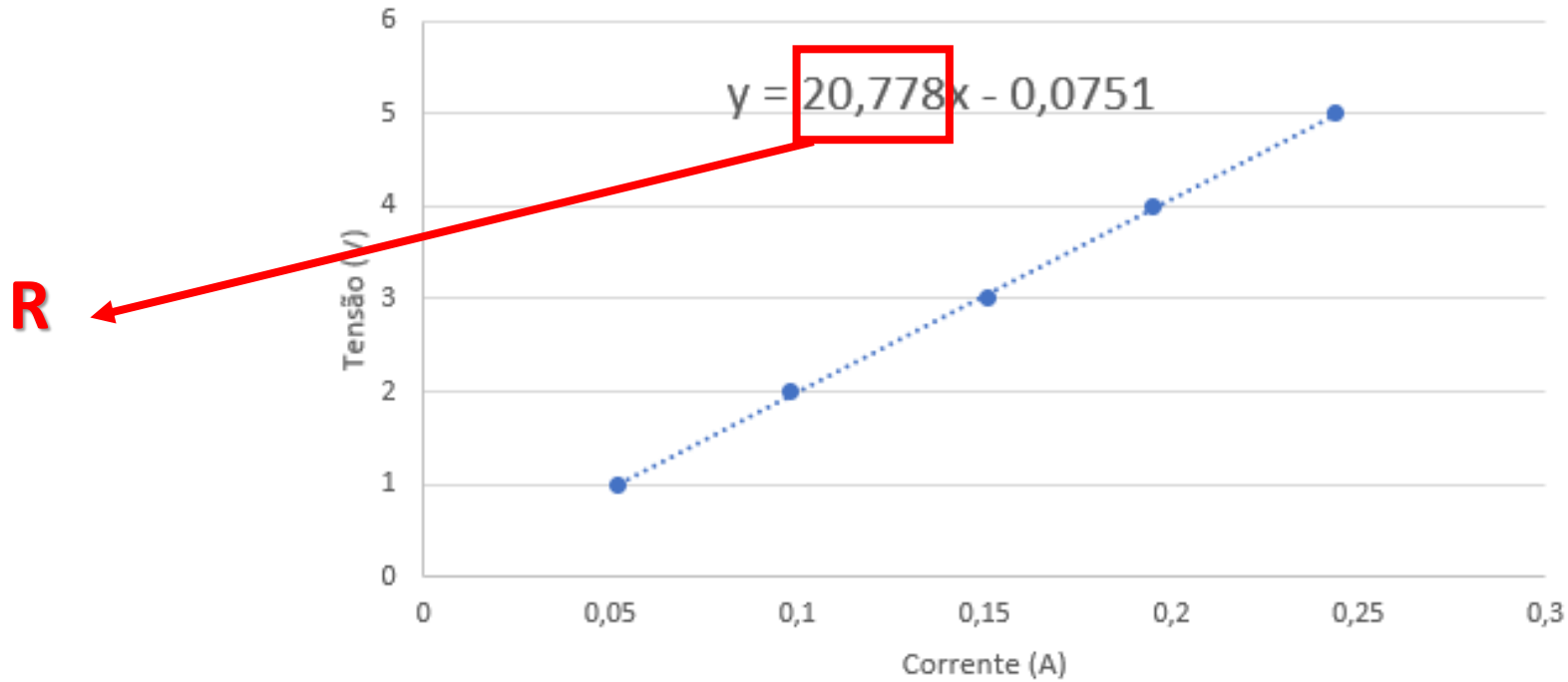


- Sabe-se que V varia linearmente com i .

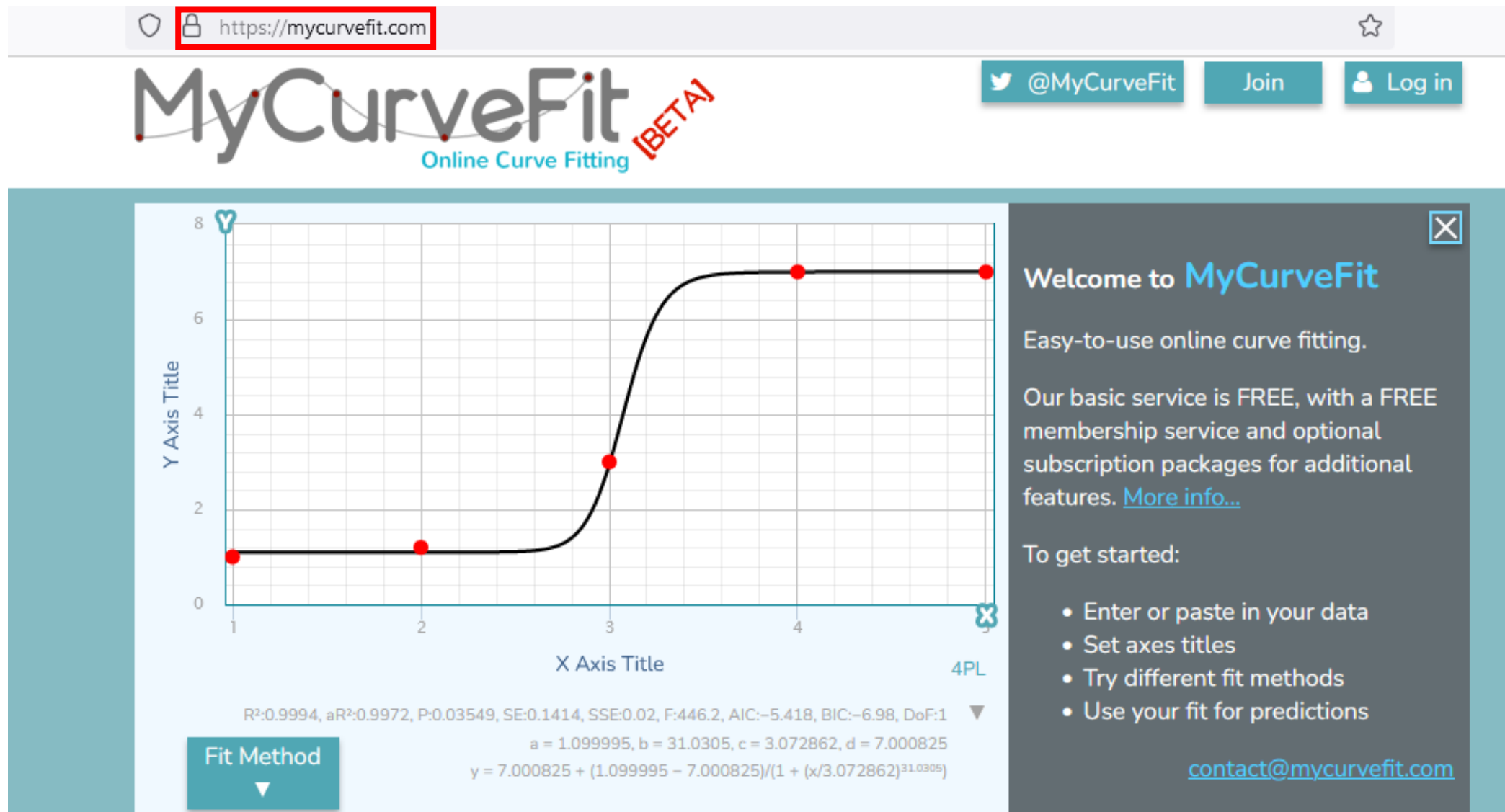
Voltando ao exemplo tensão x corrente

$$y = ax + b$$

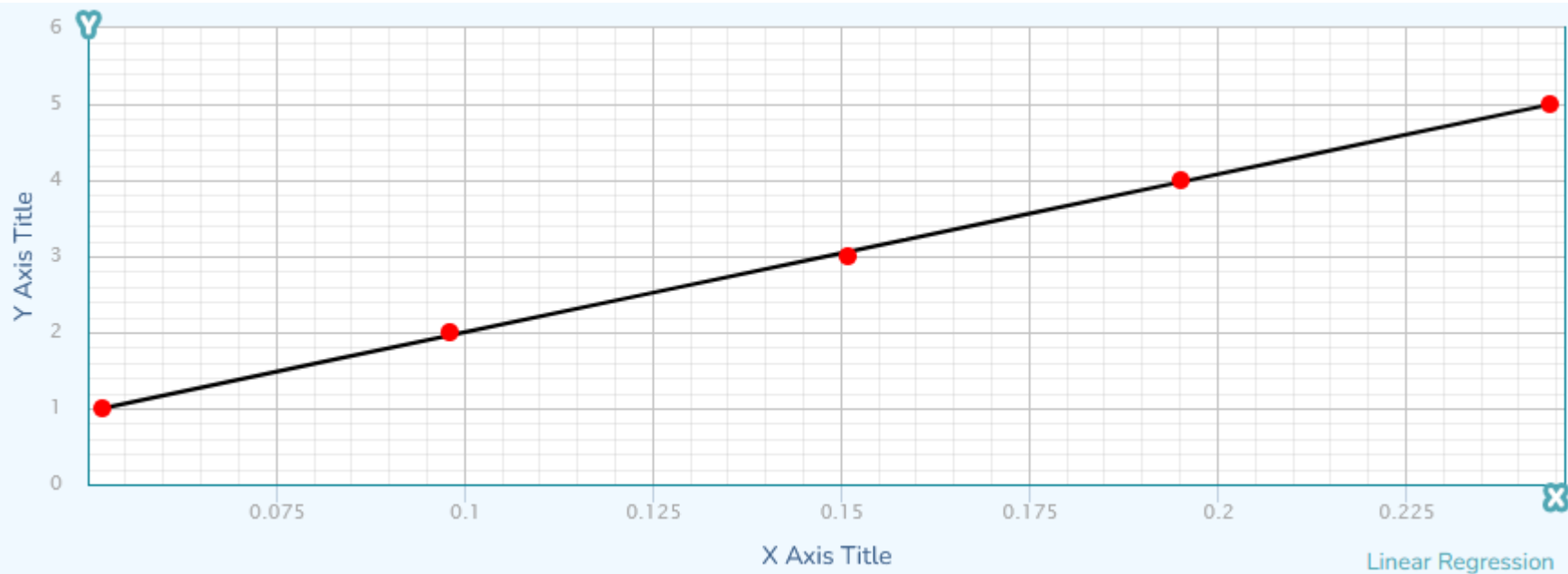
$$V = R \cdot i$$



Usando o My curve fit



Usando o My curve fit



Goodness Measures [What's this?](#)

R ²	0.9994
aR ²	0.9992
P	0.000006245
SE	0.04474
F	4993
AIC	-15.43
BIC	-16.22
DWS	3.312
DoF	3
AICc	-9.434

Coefficients

m	20.77754	± 0.294
c	-0.07507559	± 0.0479

Equation

$$y = 20.77754x - 0.07507559$$

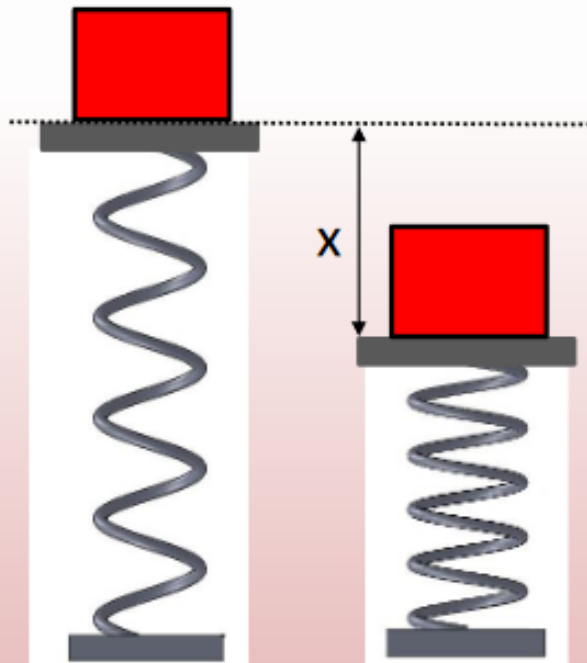
$$R = (20,8 \pm 0,3)\Omega$$

Exercício 1

Considere uma mola de constante elástica

$$k = (120 \pm 10) \text{ N/m.}$$

Utilizando seis objetos de massas conhecidas, medimos o deslocamento da plataforma após a compressão da mola e obtemos os seguintes resultados:



Compressão (m)	Massa (kg)
0,016	0,20
0,033	0,40
0,049	0,60
0,065	0,80
0,083	1,00

Sabendo que a força exercida sobre a mola é o peso do objeto, $kx = mg$, faça um gráfico e encontre o valor da aceleração da gravidade g .

Neste caso $x = (g/k) m$