UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

CF1819 – Laboratório de Física Básica I

Professores da disciplina em 2022/2:
Ismael Leandro Graff
Fabiano Yokaichiya

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 3
Relatório de uma experiência 3
Relação das Experiências 5
Bibliografia Recomendada 5

2. CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE GRÁFICOS 7
Procedimento para construção de gráficos 7
Exercícios 11
Relação entre variáveis – O caso linear 12
Exercícios 20

3. LINEARIZAÇÃO DE GRÁFICOS 22
Interpolação 24
Extrapolação 25
Referências 25
Exercícios 26

4. MEDIDAS E PROPAGAÇÃO DE ERROS 34
O Conceito de Medida 34
Tipos de Medidas 34
Expressão da Medida de uma Grandeza Quando Apenas uma Medida é Efetuada 34
Definições 35
Expressão da Medida de uma Grandeza quando Várias Medidas são efetuadas 36
Referência 41

5. CLASSIFICAÇÃO DE ERROS 42
Erros sistemáticos 42
Erros acidentais 42
Erros grosseiros 42

6. ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS 44
Mudança de Unidade 44
Critérios de Arredondamento 44
Usando o Arredondamento para Representar Medidas 45
Operações Matemáticas com Medidas 46
Exercícios – Algarismos significativos e propagação de erros 50

7. INSTRUMENTOS DE MEDIDAS: PAQUÍMETRO E MICRÔMETRO 54
Utilização do paquímetro 54
Micrômetro ou Palmer 57

8. TABELA DE EXPERIMENTOS 60

9. Determinação da Aceleração de um Corpo (Cinemática e Dinâmica) 61

10. Força Centrípeta 66

11. Movimento Parabólico 70

12. Conservação de Energia Mecânica 83

13. Constante Elástica de uma Mola e as Associações em Série e Paralelo 66

14. Equilíbrio de Forças 74

15. Colisões em uma dimensão 87

16. Impulso de uma Força 92

17. Colisões Bidimensionais 97

1. INTRODUÇÃO

As atividades programadas para esta disciplina têm por meta o aprendizado de Física Básica através da experimentação. Para atingir este objetivo, foi programada uma série de experimentos cuja participação ativa do aluno é fundamental. Em cada experimento, são estimuladas atividades como: observar, medir, questionar, usar técnicas e métodos de análise, formalizar hipóteses, propor novos experimentos, etc.

Os objetivos desta disciplina, os quais nós esperamos que sejam atingidos, estão listados a seguir e são norteados por uma filosofia inspiradora que é:

Aprender Física e muito mais...

Não se deseja que as atividades de laboratório se reduzam simplesmente à verificação de leis, por mera substituição de dados ou preenchimento de tabelas, que venha permitir ao aluno uma resposta simplesmente do tipo: "Os resultados estão de acordo com a teoria dentro dos erros experimentais".

As atividades diárias de laboratório serão subdivididas em 2 partes:

I. Uma prática em equipe (com duração variável, mas em geral prevista para 1,5 a 2,0 horas).

II. Análise, discussões, pesquisa bibliográfica e confecção do relatório (duração variável, mas em geral prevista para 1,5 horas).

A prática em equipe não terá uma duração rígida, mas o ideal é não ultrapassar o intervalo de 2 horas, para a montagem, organização e coleta dos dados. Tudo isto dependendo do assunto proposto, preparação prévia e da velocidade da equipe. O restante da aula os membros da equipe dedicarão à segunda parte que é a confecção do relatório simplificado e discussão das questões propostas.

Relatório de uma experiência

Como deve ser um relatório de uma experiência?

O relatório de uma experiência é uma descrição organizada do experimento, orientado na maioria das vezes pelos objetivos, questões e procedimentos propostos.

O relatório deve conter essencialmente: resultados das medidas, formas de obtê-las, método empregado, tabelas, gráficos, desenho ou esboço do arranjo experimental, análise dos resultados obtidos, discussão das questões propostas, conclusões do trabalho e finalmente as bibliografias consultadas. Além disso, o relatório deverá ter uma boa apresentação, que poderá ser: em folha de papel almaço (escrito com letra legível) ou impresso com computador.

Para o relato do trabalho realizado em laboratório costuma-se organizar o conteúdo nas seguintes partes:

I. **Título:** Em geral é o tema principal de estudo, expresso com poucas palavras, dando a ideia geral do trabalho ou do tema estudado. Pode ser o título apresentado no roteiro.

II. **Objetivo:** Descreve-se aqui a finalidade da experiência, em geral relatando o que se pretende fazer.

III. **Material:** Faz-se uma listagem descrevendo o material empregado.

IV. **Fundamentação Teórica:** Neste segmento é feita uma descrição do fenômeno estudado, relacionando os principais conceitos envolvidos para a compreensão dos procedimentos descritos a seguir. Pode-se fazer aqui uma apresentação teórica do problema estudado. Apresente os conceitos e as equações necessárias para a análise dos dados experimentais.

V. **Procedimento Experimental:** É a descrição do método experimental. Deve-se responder perguntas do tipo: como, por quê, com o que foram feitas as medidas? Ainda deve conter um desenho ou esquema da montagem experimental usada, indicando os tipos de instrumentos de medida e a sensibilidade dos mesmos, bem como a descrição do método de medida.

VI. **Resultados e Discussões:** Nos resultados deverão ser apresentados: tabela de dados, gráficos e indicações dos cálculos com propagação de erros (erros das medidas), além da análise dos dados e gráficos.

VII. **Conclusões:** Discutem-se os resultados obtidos e o método empregado para atingir os objetivos propostos. Faz-se a comparação com outros resultados obtidos com métodos idênticos e diferentes, conforme o caso. A conclusão é o ponto de discussão sobre a validade da comparação entre os resultados experimentais obtidos e aqueles previstos pelos modelos teóricos. É o resumo do que se aprendeu ou concluiu com o experimento.

Com o objetivo de estimular a escrita em formato padrão utilizado na produção e divulgação do conhecimento científico, o relatório poderá ser escrito em forma de artigo. Um modelo pode ser encontrado no próprio laboratório, o qual pode ser emprestado para se fazer uma fotocópia, ou no site da disciplina.

Relação das Experiências

Bloco 1	Bloco 2
Movimento Retilíneo Uniformemente Variado	Lei de Hooke e Associação de Molas
Força Centrípeta	Equilíbrio de Forças
Movimento Parabólico	Impulso e Colisões em uma Dimensão
Conservação da Energia Mecânica	Colisões Bidimensionais

Bibliografia Recomendada

O conteúdo de Física experimental é encontrado em um grande número de livros de Física Básica e em outros mais direcionados a trabalhos práticos. Com enfoque variado, a consulta a estes livros, quer seja para estudos individuais voluntários, ou como necessidade durante este curso, virá a ser de muita valia para a compreensão do conteúdo da Física como um todo.

A bibliografia aqui citada está disponível na Biblioteca de nossa Universidade. Algumas delas são muito antigas, mas muito úteis.

1. H. F. Meners, Physics "Demonstrations Experiments", Vol I e II, The Ronald Press Company, N.Y. (1970).
2. P. Lucie, *"Física Básica"*, vol I e II, Ed Campus, RJ. (1979).
3. "*Advanced Undergraduate Experiments in Physics*, *"The Taylor Manual"*, Ed. T. B. Brown, Addison-Wesley (1964).
4. M.S. White, K.V. Manning, R.L. Weber, *"Pratical Physics"*, Mc Graw-Hill, NY. (1955).
5. R. Resnick e D. Halliday, *"Física"*, vol 1, LTC, SP, (1979).
6. P. Tippler, “Física”, vol 1-2, 3 Ed, LTC, (1995)
7. R.M. Sutton, *"Demonstration Experiments in Physics"*, Mc. Graw-Hill (1938).
8. W. Watson, *"Práticas de Física"*, Ed. Labor. Buenos Aires (1939).
9. E. Perucca, *"Física General y Experimental"*, Tomo1, Ed. Labor, Barcelona (1953).
10. E. Wiedemann, *"Práticas de Física"*, Ed. Gustavo Gilli, Barcelona (1932).
11. J.S. Fernandes e E.E. Galoni, "*Trabajos Práticos de Física"*, Ed. Labor, Buenos Aires, (1943).
12. W. H. Westphal, *"Práticas de Física"*, Ed. Labor, Barcelona, (1943).
13. G. Casttelfranchi, *"Física Sperimentale e Applicata*", Vol I, Ed. Ulrico Hoepli, Milano (1948).
14. Schneider & Ham, *"Experimental Physics for Colleges"*, Mac-Millan Company, NY. (1960).

15. C. Schaefer e Bergmann, *"Práticas Fundamentales de Física"*, Ed Labor, Barcelona (1946).

16. N. C. Harris, *"Experiments in Applied Physics"*, Mc Graw-Hill, (1963).

17. B.C. Worsnop e H. T. Flint, *"Curso Superior de Física Práctica"*, Tomo I e II, Ed. Univers de Buenos Aires (1964).

18. J. Goldemberg, *"Física Geral e Experimental"*, vol I e II, Ed. Nacional, (1970).

19. E. C. Hennies, W. O. N. Guimarães, e J. A. Roversi, *"Problemas Experimentais de Física"*, Ed Unicamp, (1988).

20. J. Strong, "*Procedures in Experimental Physics"*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1961).

21. Sears, Zemansky e Young, *"Fisica"*, vol I e II, 2 Ed, LTC, SP, (1988).

2. CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE GRÁFICOS

É muito comum encontrarmos situações em que uma grandeza depende de outra. Para analisar essas situações de forma quantitativa (e algumas vezes mesmo que apenas qualitativamente) é importante investigar a relação entre as grandezas. Uma das principais maneiras de se fazer isso é através de gráficos. Um gráfico consiste em representar os valores das duas variáveis pela posição de um único ponto em relação a um sistema de eixos; a distância do ponto a cada eixo indica o valor da grandeza. Ao representar um par de valores por apenas um ponto, o gráfico possibilita ao leitor visualizar muitos valores simultaneamente, dando assim uma ideia global da dependência de uma variável em relação à outra. Gráficos são largamente empregados em todas as áreas do conhecimento que trabalham de forma quantitativa com dados.

É interessante observar que gráficos e tabelas constituem modos complementares de transmitir informação. O gráfico oferece uma visão de conjunto da relação entre duas variáveis, mas a precisão de representação de cada valor é, em geral, bem menor do que numa tabela. Em contrapartida, uma tabela dá muito mais precisão em valores individuais, mas torna difícil ter uma visão global do fenômeno.

Um gráfico deve ser construído de forma a maximizar a quantidade de informação transmitida e a conveniência de uso pelo leitor. Para atingir esse objetivo é muito importante seguir uma metodologia de construção bem definida, que é o resultado de muitos anos de desenvolvimento pela comunidade científica e tecnológica. Na sequência do texto apresentamos esse procedimento em detalhes, e em seguida descrevemos métodos quantitativos de análise da dependência entre duas variáveis.

Procedimento para construção de gráficos

O ponto de partida para a elaboração de um gráfico é a tabela de valores das grandezas. As etapas de construção da figura são as seguintes:

- *Definição do tamanho*. Escolha a área retangular que será usada para o desenho. Sugere-se que as dimensões, horizontal e vertical, estejam no intervalo 10 – 20 cm, sendo que a menor delas não deve ser inferior a aproximadamente 2/3 da maior, por razões tanto estéticas quanto de precisão da representação. Lembre-se que é preciso deixar uma margem de aproximadamente 2 cm de cada lado da figura.
- *Definição das grandezas*. Escolha a grandeza que será representada no eixo horizontal e no vertical. Normalmente a grandeza independente é representada no eixo horizontal, porém essa regra não é rígida.

- Construção dos eixos. Os eixos são completamente independentes entre si. O processo de construção é descrito abaixo.
- Marcação dos pontos. Somente após os eixos estarem desenhados é que os pontos são marcados. Devem ser pequenos, mas bem visíveis. Cada par de valores da tabela correspondente a um ponto e todos devem constar no gráfico.

Um eixo de gráfico é uma reta com marcações numeradas ao longo de seu comprimento, como mostra a figura 1, e deve ser desenhado conforme as instruções a seguir:

- Comprimento. O comprimento do eixo é definido pelo espaço reservado para o gráfico. Note que há bastante flexibilidade nesta escolha.
- Marcas. As marcas são traços transversais ao eixo igualmente espaçados (no caso de gráficos lineares; outros são mencionados posteriormente). Deve haver no mínimo três marcas ao longo do eixo, e no máximo sete. A distância no papel entre elas deve ser um número conveniente de se trabalhar, que pode ser representado de forma exata com poucos algarismos. O leitor deve poder determinar esse valor facilmente com uma régua.
- Numeração. Cada marca tem um número associado que indica o valor da grandeza naquele ponto. Como a distância entre as marcas é constante, a diferença entre os valores consecutivos também é constante. Esses números devem ser convenientes de se trabalhar, com poucos algarismos, e normalmente são diferentes dos valores da tabela. Os valores, mínimo e máximo, devem ser escolhidos de modo a que o conjunto de todos os pontos da tabela ocupe pelo menos 75% do comprimento do eixo.
- Indicação da grandeza. É indispensável indicar a grandeza representada no eixo e sua unidade.

A fim de ilustrar a aplicação das regras acima apresentamos na tabela 1 o resultado de um experimento para a determinação da velocidade e da posição inicial de um corpo que se move com velocidade constante. Mediu-se a posição do corpo *x* para diversos instantes de tempo *t*.

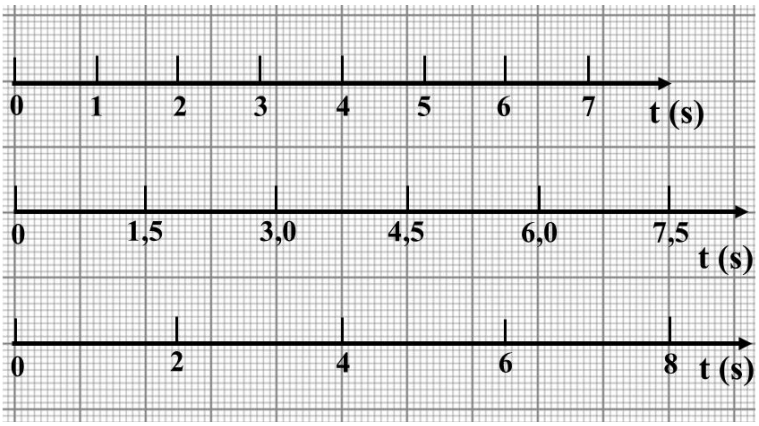
Tabela 1 – Medidas de tempo (*t*) e posição (*x*) para determinação da velocidade e da posição inicial.

t (s)	0,5	1,7	3,0	4,5	6,2
x (m)	2,1	6,5	11,6	16,4	22,8

Para os valores do tempo, que correpondem ao eixo X, os valores extremos da tabela são 0,5 s e 6,2 s. No caso dos valores de posição, que correspondem ao eixo Y, os valores extremos são 2,1 m e 22,8 m. Portanto, os eixos do nosso gráfico têm que cobrir esta faixa de valores. O próximo passo é

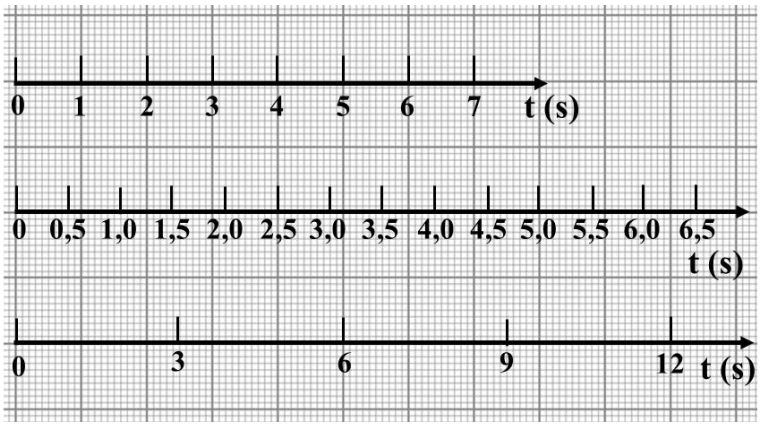
escolher a origem dos eixos, isto é, o ponto onde ele intercepta o outro eixo do gráfico. É interessante, na maioria dos casos, escolher a origem como sendo o zero, logo, nossa faixa, para o eixo X, se estende agora de 0 s a 7,0 s. Para um dado conjunto de valores a serem colocados no gráfico, vários eixos são possíveis, como se pode observar na figura 1. Note que a escolha do número de marcas está ligada à numeração. Note também que os números dos eixos não são, em geral, os valores da tabela. Porém, a identificação da grandeza e sua unidade estão sempre presentes.

Figura 1 – Exemplos de eixos adequados para representar o tempo (tabela 1) em um gráfico.



A figura 2 mostra eixos impróprios para os valores de tempo da tabela 1. O primeiro é pequeno para o tamanho do papel considerado. O segundo tem um número excessivo de marcas e números, dificultando a visualização. O terceiro cobre um intervalo de valores grande demais, fazendo com que todos os pontos do gráfico caiam na primeira metade do eixo, o que equivale na prática ao primeiro caso.

Figura 2 – Exemplos de eixos inadequados para representar o tempo (tabela 1) em um gráfico.



O processo de construção é repetido para o eixo da posição, que corresponde ao eixo Y. Pela tabela 1 vemos que o intervalo de numeração poderia ser 2 – 23 m. Porém é mais fácil interpretar um gráfico quando a origem do eixo está no zero, por isso usamos o intervalo 0 – 25 m. Note que essa

expansão do intervalo nem sempre é possível, pois pode aglomerar todos os pontos numa região pequena do papel, como mostra o terceiro caso da figura 2.

Após o desenho dos eixos, deve-se colocar os pontos experimentais no gráfico. Para isso é necessário saber a distância em milímetros no papel entre um ponto e cada eixo. Essa distância é calculada fazendo-se a seguinte regra de três:

Diferença entre dois números consecutivos → separação de marcas consecutivas no papel

Valor tabelado → posição do ponto no papel

Tomando como exemplo o segundo caso da figura 1, vemos que a diferença de tempo entre dois números consecutivos é de 1,5 s, e a separação no papel entre marcas consecutivas é de 2,0 cm. Para o ponto de tempo igual 2,1 s da tabela 1 a proporção fica então:

$$\frac{1{,}5\ s}{2{,}0\ \text{cm}} = \frac{2{,}1\ s}{x}$$

$$x = \frac{2{,}1\ s \cdot 2{,}0\ \text{cm}}{1{,}5\ s} = 2{,}8\ \text{cm}$$

A escala de um eixo é definida como:

$$\text{Escala} = \frac{\text{Separação entre duas marcas consecutivas (distâncias no papel milimetrado)}}{\text{Diferença entre dois números consecutivos (grandezas físicas representadas)}}$$

Portanto, vemos que, para calcular a posição no papel de um ponto ao longo de um eixo, basta multiplicar o valor da grandeza pela escala. Fazendo isso para todos os pontos da tabela de partida obtêm-se uma tabela de coordenadas, que é usada para marcar os pontos no gráfico. Os dados da tabela 1 produzem o gráfico da figura 3.

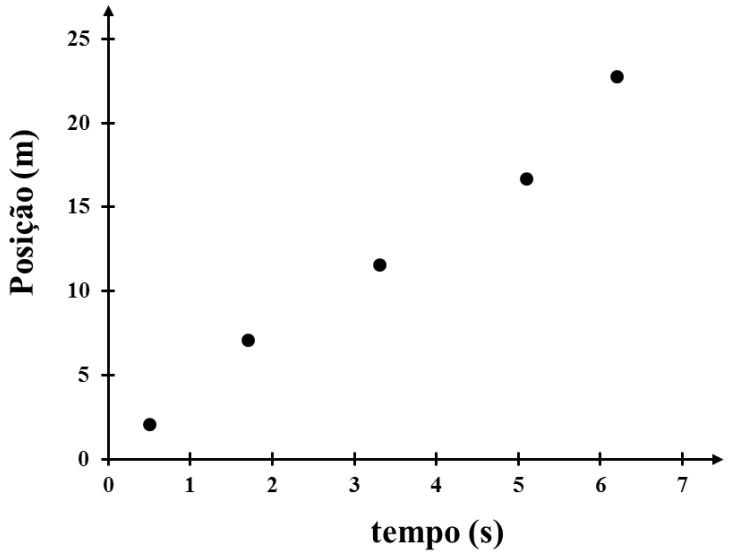


Figura 3 – Gráfico dos pontos da tabela 1.

Há algumas normas adicionais de construção de gráficos que devem ser seguidas:

- Não se escrevem os valores da tabela original no gráfico;
- Não se traçam linhas paralelas aos eixos. Se isso for indispensável para a marcação dos pontos no papel elas devem ser apagadas após o término do trabalho;
- Não se ligam os pontos através de linhas, eles devem ser deixados isolados. Somente podem ser traçadas curvas com significado bem definido, como por exemplo, funções ajustadas aos dados.

O objetivo dessas normas é evidenciar o máximo possível os pontos para facilitar a identificação da relação entre as variáveis. Observamos que elas foram seguidas na figura 3.

É interessante olhar a distribuição dos pontos no gráfico a fim de verificar a dependência entre as grandezas, pois esse é o objetivo do gráfico. Funções típicas são: reta, parábola, inverso, entre outras, como teremos oportunidade de ver nos próximos passos. No nosso exemplo é possível visualizar claramente uma linha reta, o que está de acordo com o esperado, já que a relação entre posição e tempo em um movimento com velocidade constante é linear. A partir disso é possível fazer uma análise quantitativa dos dados. Essa técnica de análise é descrita na seção seguinte.

Exercícios

1) Em uma determinada prática foram obtidas as medidas da posição a cada instante de tempo de um objeto em movimento, apresentadas na tabela abaixo. Utilizando um papel milimetrado, faça um gráfico de posição *versus* tempo.

s (m)	0	5	10	15	20	25
t (s)	0	1	2	3	4	5

2) Em uma determinada prática foram obtidas as medidas da posição a cada instante de tempo de um objeto em movimento, apresentadas na tabela abaixo. Utilizando um papel milimetrado, faça um gráfico de posição *versus* tempo.

t (s)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
s (cm)	10	11,6	16,5	24,6	35,9	50,5

3) Em uma determinada prática foram obtidas as medidas da velocidade em determinados pontos da trajetória de um objeto em movimento, apresentadas na tabela abaixo. Utilizando um papel milimetrado, faça um gráfico de velocidade *versus* posição.

s (cm)	0	10	20	30	40	50
v (cm/s)	1,2	5,6	7,8	9,5	11,1	12,3

4) Em uma determinada prática foram obtidas as medidas da massa e do volume de um objeto, apresentadas na tabela abaixo. Utilizando um papel milimetrado, faça um gráfico de massa *versus* volume.

m (g)	12,2	25,6	35,4	57,1	88,9	102,8
V (cm^3)	4,5	9,4	13,1	21,2	32,9	38,0

5) Em uma determinada prática foram obtidas as medidas da massa e do volume de um objeto, apresentadas na tabela abaixo. Utilizando um papel milimetrado, faça um gráfico de volume *versus* massa.

m (g)	105,1	254,6	404,1	798,4	1015,5	1149,1
V (cm^3)	11,8	28,6	45,0	89,7	114,1	129,1

Relação entre variáveis – O caso linear

Nas áreas de ciência e tecnologia frequentemente precisamos ir além da simples visualização do comportamento das grandezas representadas nos eixos X e Y e determinar quantitativamente a relação entre eles. Em geral esse processo não é simples e depende do conhecimento específico sobre o fenômeno investigado. Há, porém um caso particularmente simples e importante na prática, que é quando os pontos estão todos próximos de uma única reta. Por isso iniciaremos o estudo quantitativo de gráficos através dele. Veremos posteriormente alguns outros casos que podem ser reduzidos ao linear. Uma reta pode ser descrita analiticamente através da equação:

$$y = ax + b \qquad (1)$$

onde a é o coeficiente angular, que nos dá informação sobre a inclinação da reta, e b o coeficiente linear, que nos mostra o valor de y para $x = 0$. Portanto, determinar uma reta significa calcular seus coeficientes a e b. Nosso objetivo é descobrir a reta que melhor descreve o comportamento dos dados, isto é, a reta que no gráfico passa mais perto do conjunto de pontos. Há dois métodos de se fazer isso, o gráfico ou manual e o analítico.

Método gráfico de determinação da reta

O método manual consiste em traçar uma reta que visualmente esteja a mais próxima possível de todos os pontos. Seus coeficientes podem então ser calculados através do procedimento abaixo.

- Selecionam-se dois pontos sobre a reta, de preferência próximos de extremos opostos da linha, mais distantes entre si, para diminuir o erro de representação gráfica, como mostrados na figura 4.
- Determinam-se as coordenadas, nas variáveis da grandeza e não em milímetros no papel, e usando-se a regra de três [eq. (1)] para calcular o valor da grandeza.
- Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) as coordenadas dos pontos P_1 e P_2. O coeficiente angular é dado por:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (2)$$

onde ***x* e *y* são as grandezas físicas**.

No caso da figura 4 os valores são 1,0 s e 3,9 m para o ponto P_1; para P_2 os valores são 6,8 s e 24,6 m. Portanto o coeficiente angular é:

$$a = \frac{24{,}6 - 3{,}9}{6{,}8 - 1{,}0} = 3{,}569\ m/s = 3{,}6\ m/s \qquad (3)$$

- Podem-se escolher quaisquer dois pontos sobre a reta. Não há restrições quanto a empregar algum dos pontos experimentais, desde que a reta desenhada passe sobre o mesmo.

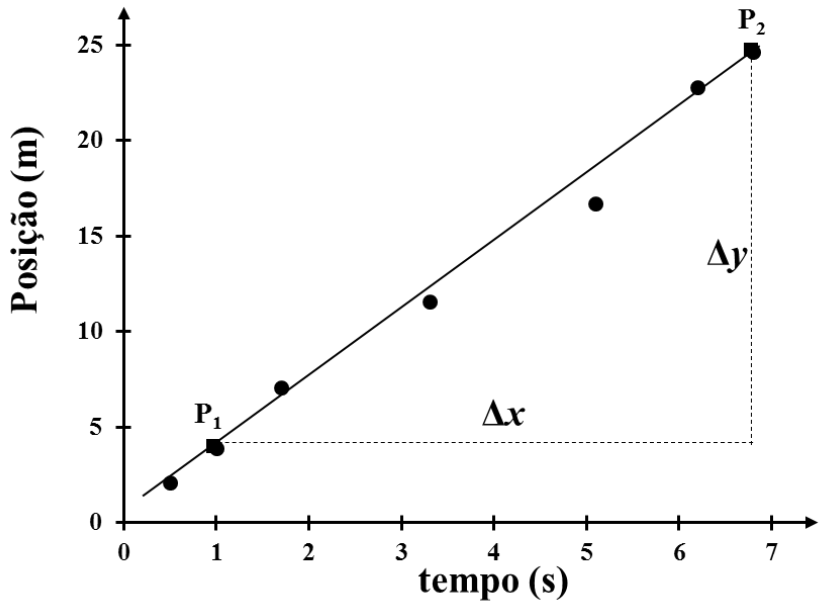


Figura 4 – Método do triângulo para determinar o coeficiente angular da reta. Os pontos P_1 e P_2 são representados por símbolos diferentes porque não são pontos experimentais.

- O coeficiente linear b é o valor de y quando $x = 0$. Se o par ordenado $(0,y)$ estiver representado no gráfico, b pode ser lido diretamente, pois é a ordenada em que a reta intercepta o eixo Y. Se o eixo Y intercepta o eixo X num ponto diferente de $x = 0$, recorre-se à equação da reta para determinar b. Isto é feito substituindo-se as coordenadas de um ponto conhecido na equação (2). Usando, por exemplo, a coordenada P_1 obtemos:

$$3{,}9 = 3{,}6 \times 1{,}0 + b \Rightarrow b = 0{,}3\ m \qquad (4)$$

Método analítico de determinação da reta

O método manual tem a vantagem da simplicidade, porém é um procedimento subjetivo, isto é, seu resultado depende do indivíduo que traça a reta. Por outro lado, o método analítico tem a vantagem de ser objetivo, o que significa que seu resultado depende unicamente dos dados e será sempre o mesmo independentemente de quem o aplique. Ele exige uma quantidade grande de cálculos, o que o tornava pouco prático, porém com a disponibilidade de calculadoras e computadores esse problema desapareceu. O método analítico é atualmente o procedimento padrão de determinação da melhor reta para descrever um conjunto de dados. Na verdade, essa técnica também conhecida por **Método dos Mínimos Quadrados**, permite ajustar qualquer função e não apenas a reta. Aqui descreveremos somente o caso linear em que empregando uma calculadora cientifica os coeficientes *a* e *b* são obtidos rapidamente, pois para outras funções o processo é significativamente mais laborioso.

O Método dos Mínimos Quadrados determina a reta que minimiza os quadrados das distâncias dos pontos a ela. As expressões dos coeficientes são:

$$a = \frac{\sum \delta x_i \delta y_i}{\sum \delta x_i^2} \qquad (5)$$

ou

$$a = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad (6)$$

e

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \qquad (7)$$

Regressão Linear – Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Em muitos experimentos são obtidos dados através de medições de grandezas físicas que são dependentes entre si. Esta relação de dependência pode ser devido a vários tipos de funções, como por exemplo:

- Na equação $r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, verifica-se que a grandeza física r (posição) depende de a (aceleração), segundo uma função do primeiro grau.
- Verifica-se também que r depende de t (tempo), segundo uma função do segundo grau.

O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) permite a obtenção da equação que relaciona as grandezas físicas, a partir dos dados obtidos experimentalmente. Isto é denominado por Regressão. Existem vários softwares que permitem o cálculo dos parâmetros da regressão (que são os coeficientes numéricos das equações), dentre eles cita-se o "Origin". Também é possível que os usuários desenvolvam programas computacionais (em FORTRAN, C, MATLAB, BASIC, etc.) para determinar os parâmetros da regressão. Abaixo são citados alguns modelos que são amplamente utilizados em física.

- Modelo do primeiro grau (reta): $y = ax + b$; parâmetros a determinar: ***a*** e ***b***.
- Modelo do segundo grau: $y = ax^2 + bx + c$; parâmetros a determinar: ***a***, ***b*** e ***c***.
- Modelo do terceiro grau: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; parâmetros a determinar: ***a***, ***b***, ***c*** e ***d***.
- Modelo exponencial: $y = a + be^{-cx}$; parâmetros a determinar: ***a***, ***b*** e ***c***.

Para cada um dos modelos acima é necessário um processamento específico. Na prática, deve-se usar um programa computacional para determinar os parâmetros desconhecidos. Para efeito de aprendizagem, será feita a determinação somente dos parâmetros do modelo de primeiro grau, a qual é denominada por **REGRESSÃO LINEAR**.

Supondo que em determinada prática foram medidos os valores de duas grandezas físicas *x* e *y* onde, previamente, é sabido que elas se relacionam segundo uma reta. Com os dados medidos foi montada a tabela 2.

Tabela 2 – conjunto de dados de *x* e *y*.

Y	y_1	y_2	y_3	...	y_n
X	x_1	x_2	x_3	...	x_n

Estes dados são colocados em um gráfico. É de se supor que todos os pontos estejam perfeitamente alinhados porque o modelo é linear. Como em todas as medidas são cometidos erros, os pontos poderiam estar dispostos de acordo com a figura 5, sem estarem perfeitamente alinhados, porém próximos do alinhamento.

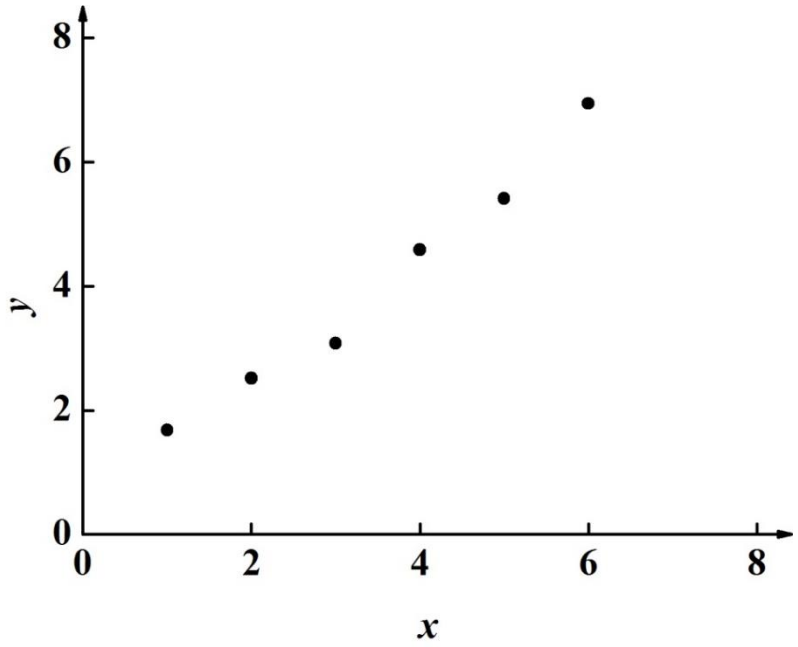


Figura 5 – Gráfico de um conjunto de pontos.

Procura-se uma reta que relacione a grandeza física representada no eixo Y em função da grandeza física representada no eixo X. Em princípio são infinitas as retas que podem ser traçadas de maneira a representar o comportamento dos pontos da figura 5. Se cada um dos alunos da classe traçar uma reta, usando um critério subjetivo, serão inúmeras as retas obtidas. O MMQ atribui critérios para que seja possível a obtenção de uma única reta, independentemente de quem a determina (a menos dos arredondamentos). O principal critério é que a soma dos quadrados dos desvios entre a reta proposta e os pontos experimentais seja mínima. O desvio (δ_i) é a diferença entre o valor medido (x_i) e o valor médio $(\bar{x})$. Na sequência, é mostrado o procedimento que prova que a média que satisfaz ao critério de mínimos quadrados é a média aritmética.

Seja a função $f(x)$, que corresponde à soma dos quadrados dos desvios. É imposta a condição de que esta função deva ser mínima.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2 = \text{mínimo}$$

A condição para que a função seja mínima é que a sua derivada primeira, em relação à $\bar{x}$, seja nula.

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}\bar{x}} = -2x_1 + 2\bar{x} - 2x_2 + 2\bar{x} - 2x_3 + 2\bar{x} - \cdots - 2x_n + 2\bar{x} = 0$$

ou seja,

$$-x_1 - x_2 - x_3 - \cdots - x_n + n\bar{x} = -\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x} = 0$$

resultando,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{8}$$

Então, $\bar{x}$ corresponde à média aritmética.

A confirmação de que se trata de uma condição de mínimo é feita se a derivada segunda da função $f(x)$, em relação à mesma variável $\bar{x}$, for positiva, logo:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}\bar{x}^2} = 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 2n > 0$$

Conclusão: a média que faz com que a soma dos quadrados dos desvios seja mínima é a média aritmética.

O segundo critério a ser adotado é a imposição da condição de que a reta deva passar pelo ponto médio, $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$. A equação da reta que passa pelo ponto médio é dada por:

$$y - \bar{y} = a(x - \bar{x}) \tag{9}$$

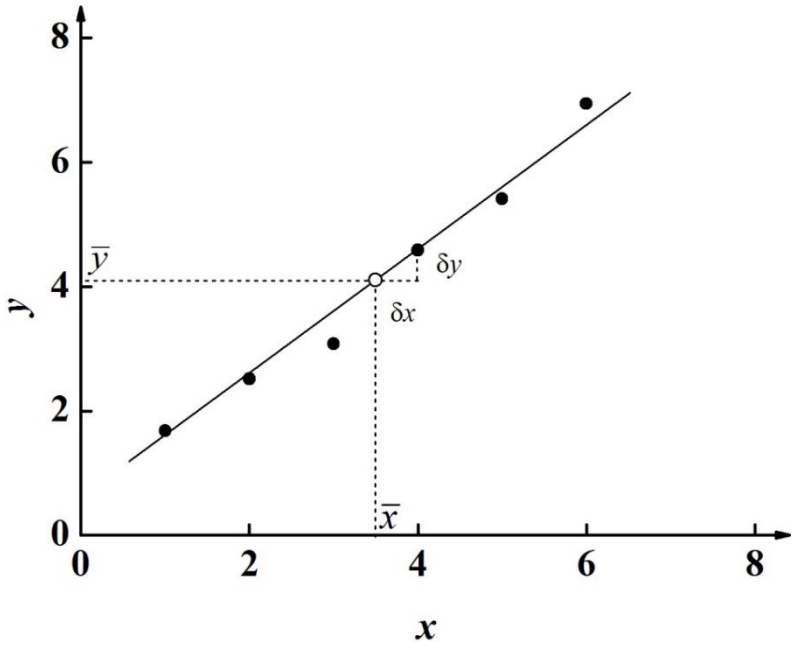


Figura 6 – Reta que passa pelo ponto médio e por um dos pontos medidos.

Como os pontos médios são conhecidos, basta determinar o coeficiente angular (a) para que a reta procurada seja determinada. A demonstração analítica da equação que permite determinar o coeficiente angular não será feita, mas sim uma análise conceitual que permite chegar à equação desejada. O leitor que tiver interesse nesta demonstração deverá procurar o assunto em livros de estatística. A procura pela reta que passa pelo ponto médio é feita, inicialmente, considerando como

sendo aquela que passa pelo ponto médio e por um dos pontos medidos, conforme pode ser visto na figura 6.

O coeficiente angular desta reta é dado por:

$$a = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{y - \bar{y}}{x - \bar{x}}$$

Mas, este é o coeficiente angular da reta que passa pelo ponto médio e por apenas um dos pontos dentre os medidos. Uma tentativa de fazer com que todos os pontos participem do processo seria considerar a equação:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta y_i}{\sum_{i=1}^{n} \delta x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})}$$

Esta equação, em princípio, deveria permitir o cálculo do coeficiente angular. Porém, por uma propriedade estatística, o somatório dos desvios é nulo. Logo, na equação acima, ter-se-ia $\frac{0}{0}$, o que caracteriza uma indeterminação.

Para evitar que o denominador seja nulo, multiplica-se o mesmo por (δx_i). Para que a equação não se altere, o numerador também é multiplicado pelo mesmo fator, resultando:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta y_i \cdot \delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \delta x_i \, \delta x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta y_i \cdot \delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} (\delta x_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}) \cdot (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \qquad (10)$$

A equação 10 é aquela que permite determinar o coeficiente angular (parâmetro a do modelo de primeiro grau ou modelo linear) da reta que passa pelo ponto médio e que obedece ao critério de que a soma dos quadrados dos desvios é mínima.

Como o ponto médio e o coeficiente angular, agora, são conhecidos, da equação 9 resulta:

$$y = ax - a\bar{x} + \bar{y} \qquad (11)$$

Comparando-se a equação 11 com a equação reduzida da reta $(y = ax + b)$, verifica-se que o coeficiente linear (ou parâmetro *b* do modelo linear), pode ser determinado por:

$$b = -a\bar{x} + \bar{y} \qquad (12)$$

Para calcular os coeficientes recomenda-se montar uma tabela como a tabela 3, que ilustra o processo com os dados de massa e volume da tabela 1:

Tabela 4 – Exemplo de cálculo utilizando o Método dos Mínimos Quadrados.

ponto	x_i (s)	y_i (m)	$\delta x_i = x_i - \bar{x}$ (s)	$\delta y_i = y_i - \bar{y}$ (m)	$\delta x_i{}^2$ ((s)^2)	$\delta x_i \cdot \delta y_i$ (s.m)
1	0,5	2,1	-2,86	-9,96	8,1796	28,4856
2	1,7	7,1	-1,66	-4,96	2,7556	8,2336
3	3,3	11,6	-0,06	-0,46	0,0036	0,0276
4	5,1	16,7	1,74	4,64	3,0276	8,0736
5	6,2	22,8	2,84	10,74	8,0656	30,5016
	$\bar{x} = 3{,}36$	$\bar{y} = 12{,}06$		**Σ**	**22,032**	**75,322**

Com esses dados obtemos:

$$a = \frac{75{,}322\ s.m}{22{,}032\ (s)^2} = 3{,}419\ m/s$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 12{,}06\ m - \left(3{,}419\frac{m}{s}\right).(3{,}36\ s) = 0{,}573\ m$$

Note que, da comparação da equação geral da reta com a relação entre posição e tempo no movimento retilíneo uniforme, temos que o coeficiente angular a representa a velocidade do objeto (em m/s), enquanto o coeficiente linear b representa a posição inicial do objeto.

$$x = x_0 + vt\ e\ y = ax + b \rightarrow a = v\ e\ b = x_0$$

É importante traçar a reta determinada pelo Método dos Mínimos Quadrados no gráfico pois isso facilita a avaliação da qualidade do ajuste e também permite perceber eventuais erros na determinação dos coeficientes da reta. Para traçar essa reta é preciso determinar dois pontos a ela pertencentes. Esses pontos são determinados escolhendo-se duas abscissas, de preferência próximas dos extremos do intervalo dos dados e, preferencialmente, diferentes de quaisquer x_i obtidos experimentalmente. Substituindo-se as abscissas e os coeficientes obtidos pelo método de MMQ calculam-se os valores dos y_i correspondentes. Usando os valores: $x_1 = 0$ s e $x_2 = 6{,}8$ s, temos:

$$\text{P}_1\text{: } y_1 = (0\ s).(3{,}419\ m/s) + 0{,}573\ m\ = 0{,}573\ m = 0{,}57\ m$$
$$\text{P2: } y_2 = (6{,}8\ s).(3{,}419\ m/s) + 0{,}573\ m\ = 23{,}822\ m = 23{,}8\ m$$

Os pontos $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ são então utilizados para traçar a reta que melhor se ajusta ao conjunto de dados. A Fig.7 mostra a reta obtida pelo método analítico. Uma comparação rápida entre as figuras 4 e 7 mostram uma diferença visual pequena entre as retas obtidas, porém a diferença entre os valores



dos coeficientes obtidos pelo método analítico como obtido manual (eqs. (2) e (3)) constata-se uma diferença razoável no coeficiente. Isso mostra a importância de se usar o método analítico.

Figura 7 – Reta ajustada pelo Método dos Mínimos Quadrados.

Exercícios

6) Em uma determinada prática foram obtidas as medidas que são apresentadas na tabela abaixo. Determine a equação que relaciona as grandezas segundo o método dos mínimos quadrados.

x (s)	y (m)	$\delta x_i = (x_i - \bar{x})$	$\delta y_i = (y_i - \bar{y})$	$(\delta x_i)^2$	$\delta y_i \delta x_i$
1	4,2				
2	5,8				
3	8,6				
4	10,4				
5	12,0				
$\bar{x} =$	$\bar{y} =$		Σ		

Resp.: $y = 2{,}02\,x + 2{,}14$

7) Idem ao problema anterior

x	y	$\delta x_i = (x_i - \bar{x})$	$\delta y_i = (y_i - \bar{y})$	$(\delta x_i)^2$	$\delta y_i \delta x_i$
10	200				
15	150				
20	100				
25	60				
30	40				
$\bar{x} =$	$\bar{y} =$		Σ		

Resp.: y = -8,2 x + 274

8) Também é possível determinar o parâmetro ***a*** (coeficiente angular) pela equação 6:

$$a = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Para facilitar o uso desta equação, sugere-se a tabela a seguir. Recomenda-se que o problema anterior seja repetido, mas com o uso desta tabela. O usuário deve optar pelo uso daquela que melhor lhe convier.

x	y	x^2	$x \cdot y$
$\sum y =$	$\sum x =$	$\sum x^2 =$	$\sum(x \cdot y) =$

3. LINEARIZAÇÃO DE GRÁFICOS

Quando os pontos experimentais não estão alinhados ao longo de uma reta os métodos descritos anteriormente não podem ser usados diretamente, mas em alguns casos é possível fazer uma transformação de variáveis e desenhar outro gráfico em que os pontos estejam alinhados. Os métodos de ajuste de reta podem então ser usados nesse segundo gráfico. A vantagem de se fazer esse tipo de transformação é a simplicidade que o comportamento linear apresenta.

A mudança de variáveis necessária depende da relação entre as grandezas. Em geral a transformação deve ser sugerida por um modelo teórico. Se isso não for possível ela tem que ser descoberta, se existir, por tentativas. Os tipos de funções mais comuns encontradas nas relações das grandezas físicas estão apresentados nas figuras a seguir.

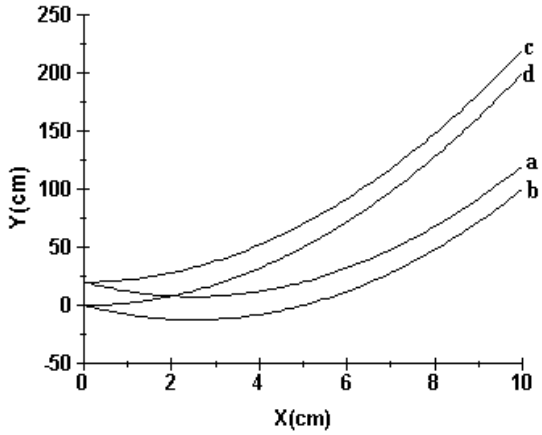


Figura 1 – Gráfico das funções do tipo $y(x) = ax^2 + bx + c$, correspondendo a: a) $y(x) = 2x^2 - 10x + 20$; b) $y(x) = 2x^2 - 10x$ c) $Y(x) = 2x^2 + 20$; d) $Y(x) = 2x^2$

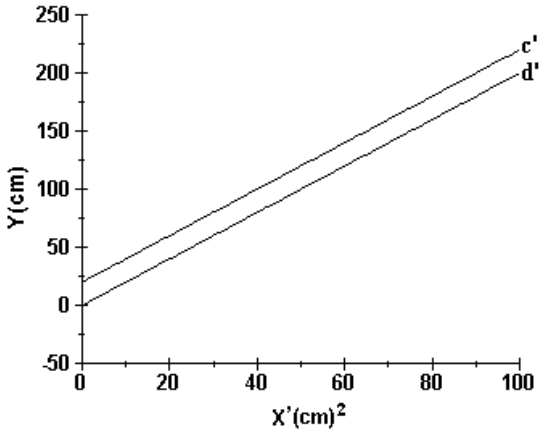
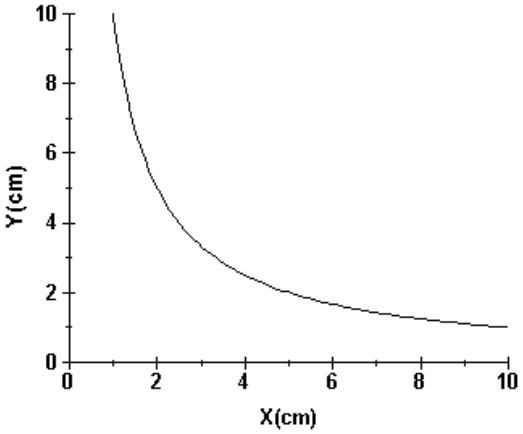


Figura 2 – Gráficos da linearização das curvas (c) e (d) da Figura 1, fazendo a mudança de variável $X' = x^2$, tem-se: c') $Y(X') = 2X' + 20$ e d') $Y(X') = 2X'$



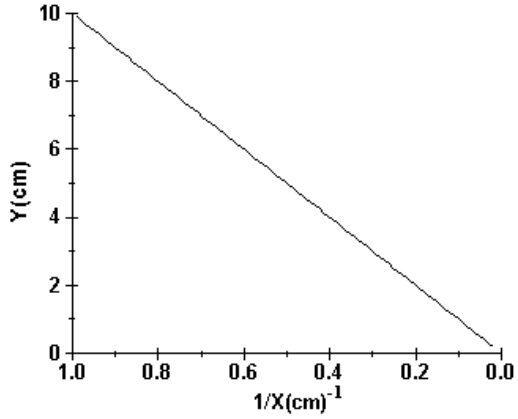


Figura 3 – Gráfico da função $y(x) = a\ (1/x)$, especificamente $Y(x) = 10 / x$

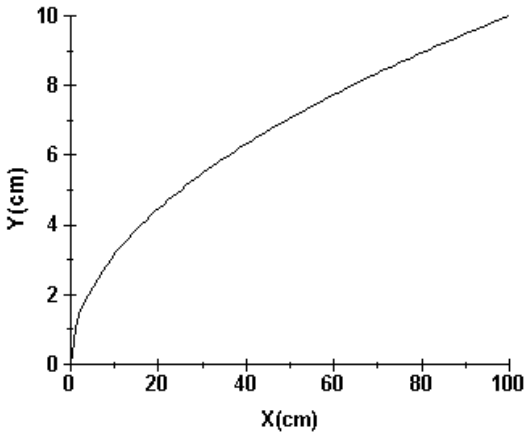


Figura 4 – Gráfico de linearização da função $Y(x) = 10/x$. Fazendo $X' = 1/x$, temos $Y(X') = 10X'$.

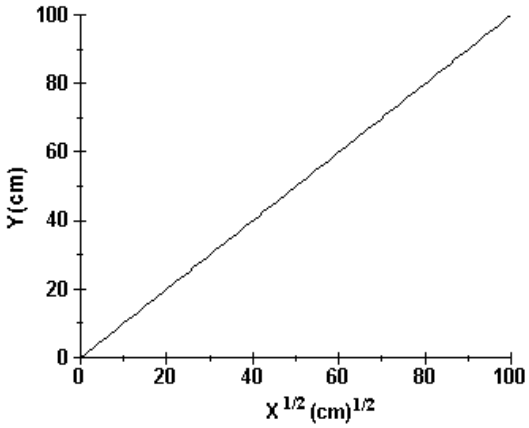


Figura 5 – Gráfico da função $y(x) = x^n$, n = 1/2

Figura 6 – Linearização da função $y(x) = x^{1/2}$. Fazendo a mudança de variável $X' = x^{1/2}$, temos $Y(X') = X'$.

Um tipo importante de função que pode ser linearizada por mudança de variável é a exponencial. Se tivermos a relação $y = Ae^{Bx}$ podemos aplicar o logaritmo em ambos os lados da equação, resultando $\ln y = \ln A + Bx$. Logo, podemos fazer a transformação $y' = \ln y$ e obter uma dependência linear entre *y'* e *x*. Um exemplo aparece nas figuras 7 e 8. O gráfico linearizado (Figura 8) usa uma escala logarítmica em vez de linear (Figura 7), onde a distância do ponto ao eixo varia proporcionalmente ao logaritmo do valor e não proporcionalmente.

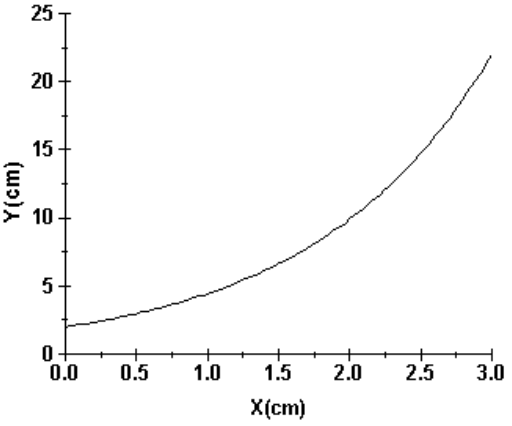


Figura 7 – Gráfico da função $y(x) = 2 \exp(0{,}8x) = 2\ e^{0,8x}$

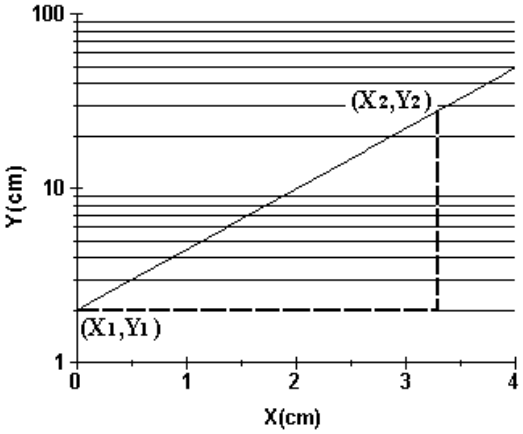


Figura 8 – Gráfico em papel monolog de $Y(x) = 2\ e^{0,8x}$

Outro tipo de função que pode ser linearizada por uma transformação logarítmica é a função, potência, $y = ax^{\alpha}$ (Figura 9). Essa função pode ser linearizada por uma mudança direta de variável $x' = x^{\alpha}$. Porém quando α não é inteiro muitas vezes é difícil descobrir seu valor. Usando uma

transformação logarítmica obtemos $\ln y = \ln a + \alpha \ln x$. Aqui é preciso definir $y' = \ln y$ e $x' = \ln x$ para obter uma relação linear entre *y'* e *x'*, que permite determinar o parâmetro α pelo coeficiente angular do gráfico $y' \times x'$. Como agora é preciso usar o logaritmo nos dois eixos usa-se um papel log-log para o gráfico, como mostrado na figura 10.

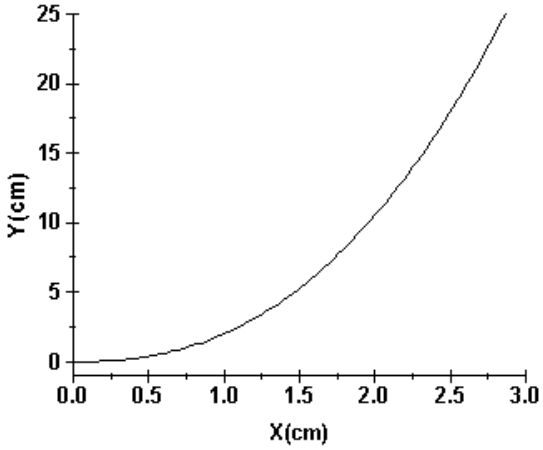


Figura 9 – Gráfico da função $Y(x) = Ax^B = 2x^{2,4}$.

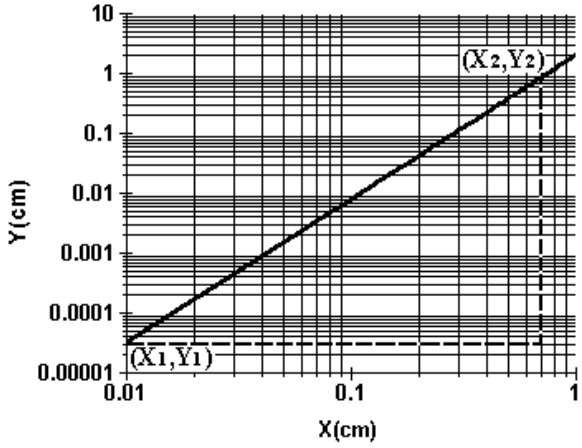
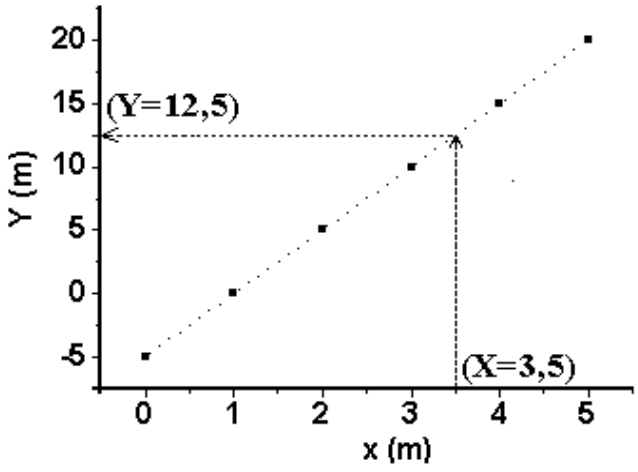


Figura 10 – Gráfico em papel log-log de $Y(x) = 2\,x^{2,4}$.

Interpolação



Conhecendo-se o gráfico ou a função que representa o conjunto de pontos experimentais, pode-se obter uma das grandezas em função da outra, para qualquer ponto dentro do intervalo representado (ou medido).

Regra:

a) localiza-se o ponto sobre o eixo *X*.

b) com auxílio de uma régua, procure o ponto sobre a curva correspondente e localize a ordenada *Y*.

Figura 11 - Gráfico exemplificando a interpolação.

Extrapolação

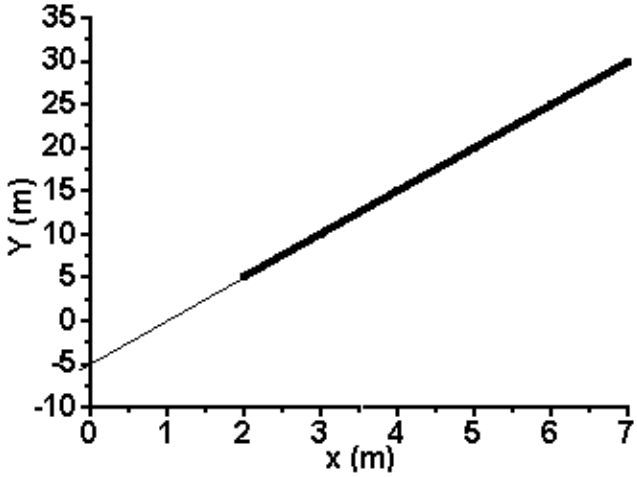


Figura 12 - Gráfico de uma função linear.

É o processo pelo qual se faz o prolongamento da curva para outra região, fora daquela medida. Este procedimento só é confiável quando a curva é representada por uma reta, caso contrário, pode-se ter erros apreciáveis no resultado obtido.

A linha fina corresponde à extrapolação da reta para se determinar o valor de b (coeficiente linear), no caso igual -5 m.

Referências

- Furtado, N. F.; Física (apêndice Física – Sears), LTC (1959).
- Baikd, D. C, Experimentation: “Introduction to Measurement Theory and Experiment Design”; Prentice Hall (1988)
- Wilton P. Da Silva, Cleide M.D. P. S. E Silva; “Tratamento de Dados Experimentais”; Ed. Universitária da UFPB (1995).

Exercícios

1) Para os dados da tabela abaixo, trace o gráfico de *y* versus *x* em papel milimetrado, representando também o desvio de *y* e considerando as medidas de *x* isentas de erro.

a) Qual deve ser o tipo de função que descreve *y* em função de *x*?

b) Qual a expressão que relaciona as grandezas *y* e *x*?

Pontos	1	2	3	4	5
x (m)	1	3	5	7	9
y (m)	4,8	14,3	26,4	34,5	44,5

2) Dados os pontos tabelados abaixo:

Pontos	1	2	3	4	5	6	7
x (m)	2	4	8	16	32	64	128
y (m)	4,24	6,00	8,48	12,00	16,97	24,00	33,94

a) Faça o gráfico de *y*(*x*) em papel milimetrado.

b) Supondo a forma $y = ax^b$ linearize a curva do "item a" por mudança de variáveis. Faça o gráfico de *y'*(*x'*) num papel milimetrado e obtenha as constantes *a* e *b* a partir deste gráfico.

Sugestão: no item "b" ajuste a reta graficamente.

3) Dados os pontos tabelados abaixo:

Pontos	1	2	3	4	5
x (s)	0,2	0,6	0,8	1,0	1,2
y (m)	2,2	5,0	7,4	11	16,5

a) Faça o gráfico de *y*(*x*) em papel milimetrado.

b) Supondo a forma $y = \alpha e^{\beta x}$ linearize a curva do "ítem a" por mudança de variáveis. Faça o gráfico de *y'*(*x'*) num papel milimetrado e obtenha as constantes α e β a partir deste gráfico. *Sugestão: no item "b" ajuste a reta graficamente*.

4) No laboratório dispõe-se de uma mola com constante elástica *k* desconhecida e pretende-se obter seu valor. O método empregado foi suspender pela mola diversas massas *m* e medir sua deformação *y*. Os resultados estão na tabela 1.

Tabela 1 – Dados de deformação da mola.

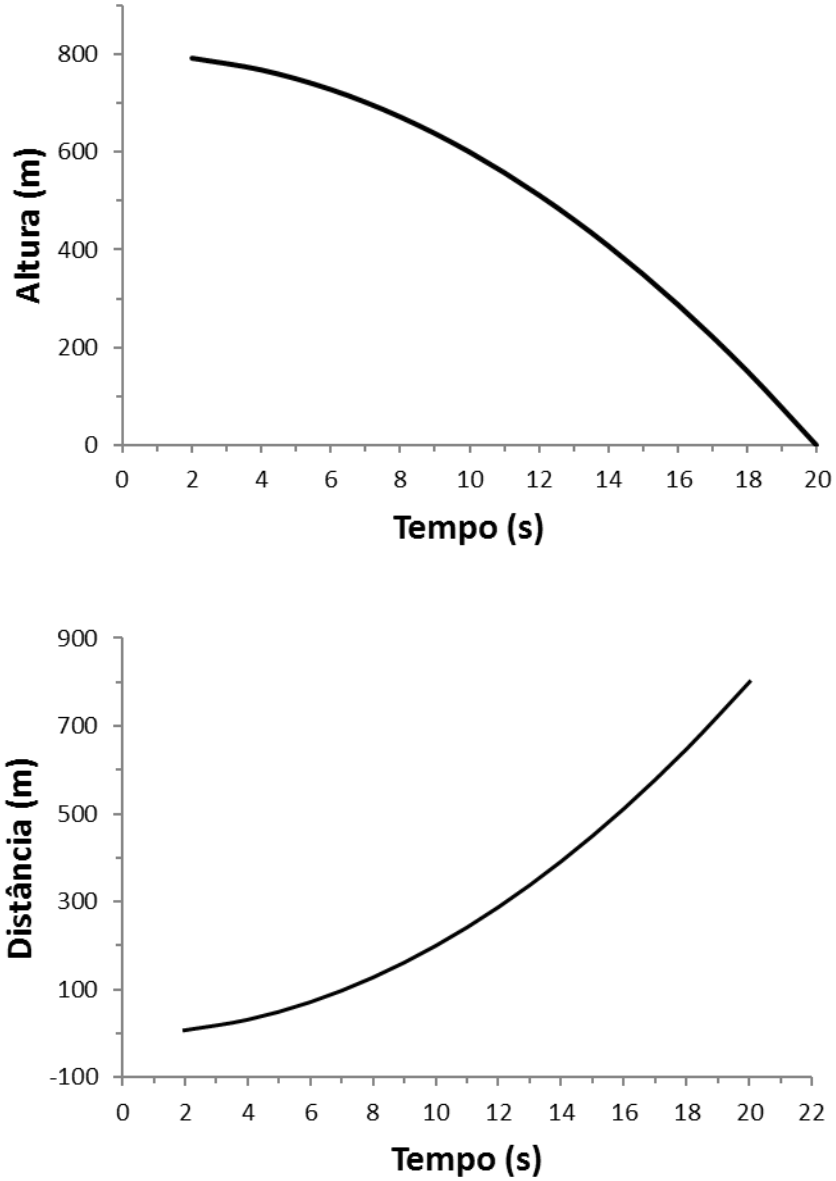
m (g)	*y* (mm)
12	4
30	10
60	18
80	25
100	30

a) Determine os parâmetros da reta em função das grandezas físicas representadas nos eixos (método analítico).
b) Trace essa reta no gráfico.
c) Qual o valor da constante elástica da mola?

d) Por que o coeficiente linear obtido da melhor reta deveria ser nulo? Se não for nulo, qual a justificativa?

5) Observe detalhadamente os gráficos da figura 13. Ambos representam dados experimentais de um evento físico.

Figura 13 – Curvas para levantamento de pares ordenados.



a) Escreva a função matemática genérica que estes gráficos representam.

b) Conhecendo-se a função matemática, é possível linearizar estes gráficos. Para tanto você precisa conhecer vários pares ordenados correspondentes a cada curva. Determine 10 pares ordenados para cada gráfico.

c) Aplique o processo de mudança de variáveis para linearizar os dois gráficos.

d) Identifique a partir dos gráficos que tipo de evento físico você acha que eles representam.

e) Respondido o item anterior, determine os parâmetros de cada evento físico.

6) Numa largada de Fórmula 1, no início de uma reta, o primeiro carro ("pole position") está a cerca de 10 m de uma marca no asfalto (linha de chegada), a partir da qual é disparado o cronômetro de cada carro. Os demais carros estão espaçados de 10 m, de tal forma que o segundo está a 20 m da marca no asfalto, o terceiro a 30 m e assim por diante. Desta forma todos os carros terão uma velocidade inicial quando passarem pela linha de chegada. A partir da linha de largada, a cada 100 m, foi medido o tempo gasto pelo carro de Rubens Barrichello, como mostra a tabela 2.

a) Faça o gráfico $S \times t$. Este gráfico é uma reta, uma curva ou tem ambas reta e curvas?

b) A cada segmento de reta ou curva corresponde um tipo de movimento diferente. Você pode identificá-los a partir do gráfico?

c) Qual seria a equação horária genérica para cada segmento característico do gráfico?

d) Faça um gráfico de Velocidade × Tempo. Neste gráfico há segmentos diferentes? Se há, são retas ou curvas?

e) Identifique o tipo de movimento para cada segmento característico do gráfico.

f) A partir do gráfico $V \times t$ qual a aceleração do carro de Rubens? Esta aceleração é constante ou variável? Determine-a.

g) Qual a velocidade de Rubens ao passar pela linha de chegada?

h) Escreva a equação horária do carro de Rubens para cada tipo de movimento.

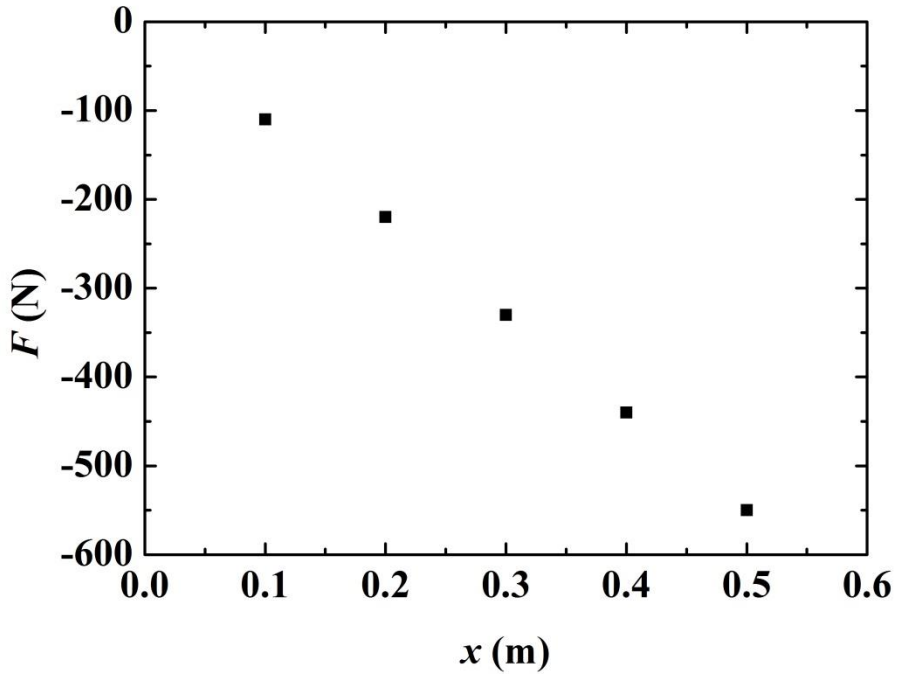
i) Qual a posição no "grid" de largada de Rubens Barrichelo?

Tabela 2 – Posição e velocidade do carro de Rubens Barrichelo.

S (m)	t (s)	V (m/s)
-50	0	0
0	3,5	28,3
100	6,1	49,0
200	7,9	63,2
300	9,4	74,8
400	10,6	84,9
500	11,7	93,8
600	12,7	102,0
700	13,7	109,5
800	14,6	109,5
900	15,5	109,5
1000	16,4	109,5
1100	17,3	109,5
1200	18,3	109,5
1300	19,2	109,5
1400	20,1	109,5
1500	21,0	109,5

7) Um experimento de laboratório foi realizado para se determinar a constante elástica *k* desconhecida de uma mola, prendendo-se a uma de suas pontas um corpo de massa *m* desconhecida. Suponha que as forças dissipativas são desprezíveis. Considere g = 9,79 m/s^2.

a) Colocando-se o sistema massa-mola numa superfície horizontal sem atrito e puxando-o com diferentes forças conhecidas, mediram-se suas respectivas deformações, tomando-se como referência o comprimento indeformado da mola. Com os dados obtidos, foi feito o seguinte gráfico:



Baseando-se no gráfico acima, determine:

a.I) A escala do eixo X: _____ a.II) A escala do eixo Y: _____

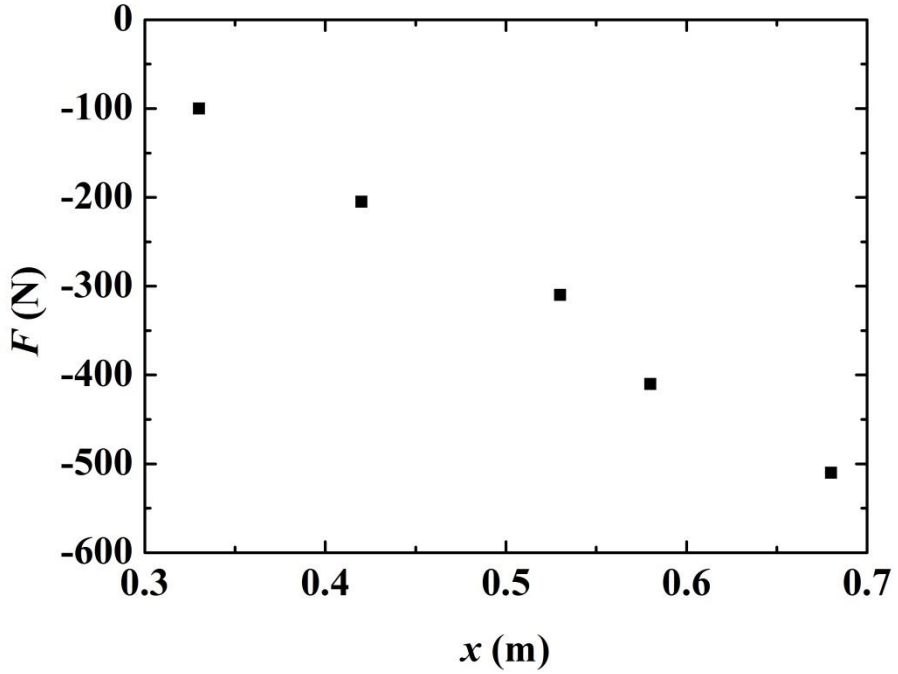
a.III) Monte a tabela de dados e, utilizando o MMQ, determine os coeficientes angular e linear da reta que melhor se ajusta a estes pontos:

x ( )	y ( )	$\delta x_i = (x_i - \bar{x})$	$\delta y_i = (y_i - \bar{y})$	$(\delta x_i)^2$	$\delta y_i \delta x_i$
$\bar{x} =$	$\bar{y} =$		Σ		

a.IV) Trace a reta ajustada pelo MMQ no gráfico acima.

a.V) Determine a constante elástica da mola *k*:

b) Suspendendo-se o sistema massa-mola na vertical, mas tomando-se como referência o mesmo comprimento indeformado do item (a), submeteu-se o sistema às mesmas forças anteriores e mediram-se suas respectivas deformações. Com os dados obtidos, foi feito o seguinte gráfico:



Baseando-se no gráfico acima, determine:

b.I) A escala do eixo X: _____

b.II) A escala do eixo Y: _____

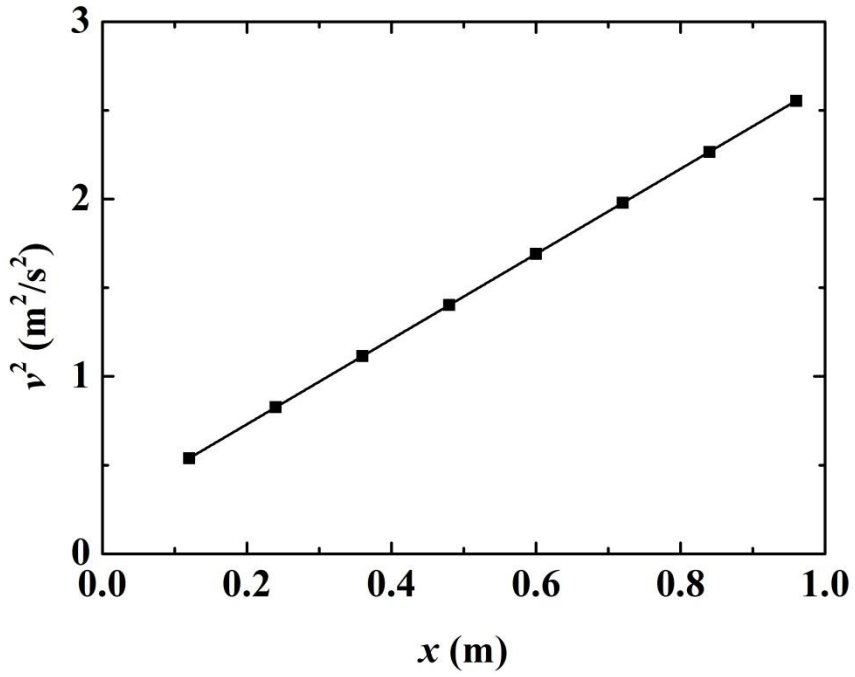
b.III) Monte a tabela de dados e, utilizando o MMQ, determine os coeficientes angular e linear da reta que melhor se ajusta a estes pontos:

x ( )	y ( )	$\delta x_i = (x_i - \bar{x})$	$\delta y_i = (y_i - \bar{y})$	$(\delta x_i)^2$	$\delta y_i \delta x_i$
$\bar{x} =$	$\bar{y} =$		Σ		

b.IV) Trace a reta ajustada pelo MMQ no gráfico acima.

b.V) Determine a massa *m* do corpo preso à mola:

8) Num experimento de Cinemática, a velocidade de um carrinho acelerado foi medida em função da sua posição, produzindo o gráfico abaixo, cuja reta representa o melhor ajuste aos pontos experimentais.



Determine:

a) A escala do eixo X: _____

b) A escala do eixo Y: _____

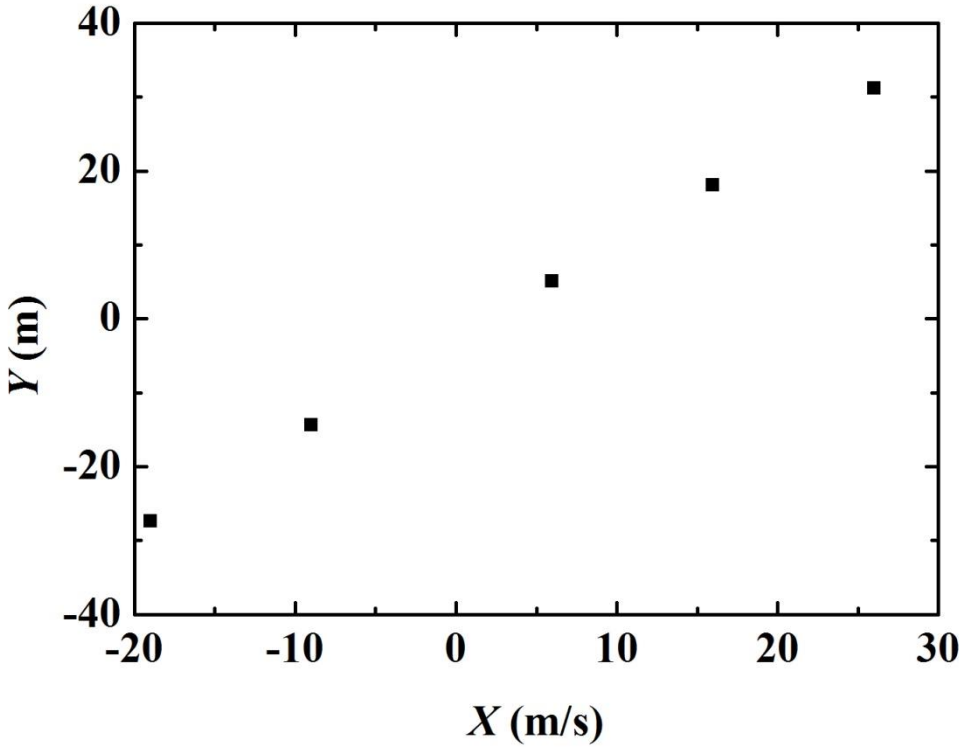
c) Graficamente o coeficiente linear da reta:

d) Graficamente o coeficiente angular da reta:

e) A velocidade inicial do carrinho:

f) A aceleração do carrinho.

9) Dado o gráfico abaixo, trace a reta que se ajusta aos pontos experimentais utilizando o método do bom senso. Determine os coeficientes linear e angular da reta ajustada.


40
20
0
-20
-40
Y (m)
-20
-10
0
10
20
30
X (m/s)

4. MEDIDAS E PROPAGAÇÃO DE ERROS

O Conceito de Medida

Medição é um processo empírico que objetiva a designação de números a propriedades de objetos ou a eventos do mundo real de forma a descrevê-los quantitativamente.

Todas as medidas possuem erros. Esses erros não podem ser completamente eliminados, consequentemente, não é possível conhecer o valor verdadeiro de uma grandeza. Por este motivo o valor de uma medida não é representado por um único valor, mas por um intervalo de valores.

Tipos de Medidas

a) Medida Nominal: Quando duas quantidades do mesmo tipo são comparadas para saber se são iguais (Ex. duas cores, acidez de dois líquidos).

b) Medida Ordinal: Quando é necessário ter informação a tamanhos relativos (Ex. Classificação por peso e altura de uma turma).

c) Medida em Intervalos: Quando deseja-se uma informação mais especifica, envolve-se então uma certa escala, sem incluir pontos de referência ou zero. (Ex. no caso anterior usar a escala de metros e quilogramas).

d) Medidas Normalizadas: Define-se um ponto de referência e realiza-se a razão, dividindo cada medida pelo valor de referência, determinando as magnitudes relativas. (Ex. O maior valor obtido será 1, quando foi escolhido como referência o valor máximo medido).

e) Medidas Cardinais: O ponto de referência é comparado com um padrão definido. Assim todo parâmetro físico pode ser medido contra uma referência padrão, como o Sistema Internacional de Medidas, o "SI".

Expressão da Medida de uma Grandeza Quando Apenas uma Medida é Efetuada

Quando é efetuada apenas uma medida de uma grandeza, a expressão da medida é condicionada à resolução do instrumento de medida. Como não é possível encontrar o valor verdadeiro de uma medida, ele é delimitado por um valor máximo e um mínimo do instrumento de medida.

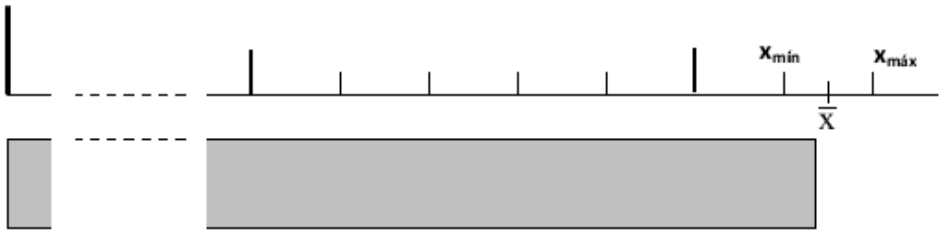


Figura 1 – Representação de um instrumento de medida indicando os valores mínimo e máximo da medida.

Definições

Precisão do instrumento (função do intervalo de confiança):

$$p = x_{MAX} - x_{MIN} \tag{1}$$

Incerteza da medida:

$$\delta x = \frac{p}{2} = \frac{x_{MAX} - x_{MIN}}{2} \tag{2}$$

Existe uma probabilidade muito grande de que o valor verdadeiro esteja entre x_{MIN} e x_{MAX}:

$$x_{MIN} < x_{VERDADEIRO} < x_{MAX} \tag{3}$$

Como o valor verdadeiro não é conhecido faz-se então uma estimativa da medida por meio do valor médio do intervalo "$\bar{x}$" e da incerteza do instrumento "δx":

$$\bar{x} - \delta x < x_{VERDADEIRO} < \bar{x} + \delta x \tag{4}$$

Expressão do valor da grandeza (ou do valor da medida):

$$x = \bar{x} \pm \delta x \tag{5}$$

Expressão da Medida de uma Grandeza quando Várias Medidas são efetuadas

Quando várias medidas de uma grandeza são efetuadas, a avaliação do erro deve estar condicionada a uma análise estatística, já que, normalmente, a flutuação das medidas será maior que a precisão do equipamento de medida. Dessa maneira, a expressão da medida deverá conter o valor médio e o erro associado, este calculado através de um dos desvios apresentados abaixo.

Média Aritmética

A média aritmética é, de modo geral, a mais importante de todas as mensurações numéricas descritivas (TRIOLA, p. 31). Durante todo este trabalho ela será designada simplesmente por "média".

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{6}$$

Desvio Padrão

O desvio padrão é uma **medida da variação dos valores de uma amostra** (TRIOLA, p. 38), pois ele considera todos os valores da amostra. O desvio padrão é um estimador das incertezas das medidas.

a) **Desvio Padrão Amostral**: É utilizado quando se analisa uma amostra de uma população:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2}{n-1}} \tag{7}$$

sendo δ_i o desvio da i-ésima medida em relação à média, o qual é expresso por:

$$\delta_i = x_i - \bar{x} \tag{8}$$

b) **Desvio Padrão Populacional**: É utilizado quando todos os elementos de um conjunto participam da análise.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2}{n}} \tag{9}$$

c) **Desvio Padrão do Valor Médio**: Quando houver uma distribuição normal, o desvio padrão do valor médio, também é denominado por erro-padrão da média (TRIOLA, 1999, p. 129), é definido por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n(n-1)}} \qquad (10)$$

Verifica-se que, matematicamente, ele também poderá ser calculado por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \qquad (11)$$

Normalmente as calculadoras eletrônicas, bem como alguns "softwares", disponibilizam para o usuário o cálculo de "s" (desvio padrão amostral) e o de "σ" (desvio padrão populacional). Cabe ao usuário determinar "$\sigma_{\bar{x}}$" (desvio padrão da média) a partir desses.

Para o cálculo do desvio padrão amostral, também pode-se fazer uso da equação alternativa:

$$s = \sqrt{\frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^2}{n(n-1)}} \qquad (12)$$

Valor da medida

A expressão dos valores é dada por:

$$x = \bar{x} \pm (\delta x + \sigma) \qquad (13)$$

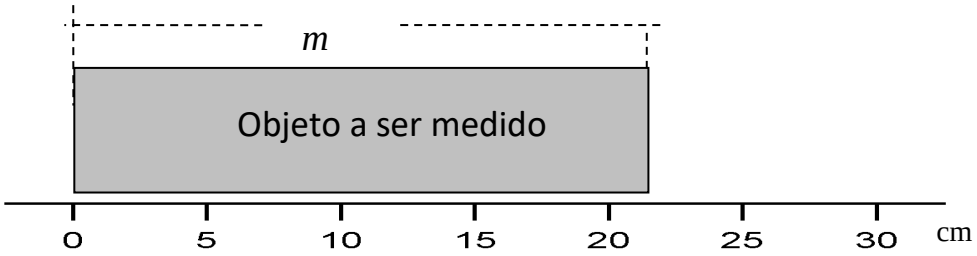
Normalmente, o desvio padrão que iremos utilizar nas práticas é o do **valor médio**: "$\sigma_{\bar{x}}$" e, assim, a expressão a ser utilizada é:

$$\boxed{x = \bar{x} \pm (\delta x + \sigma_{\bar{x}})}$$

"A incerteza do instrumento deve ser adicionada à flutuação estatística porque é um erro fixo que não pode ser reduzido aumentando o número de medidas."

Exemplos

(a) Medir o comprimento de uma peça retangular:



$$\text{Incerteza} = \delta = \frac{\text{Intervalo de confiança}}{2}$$

Valor da Medida

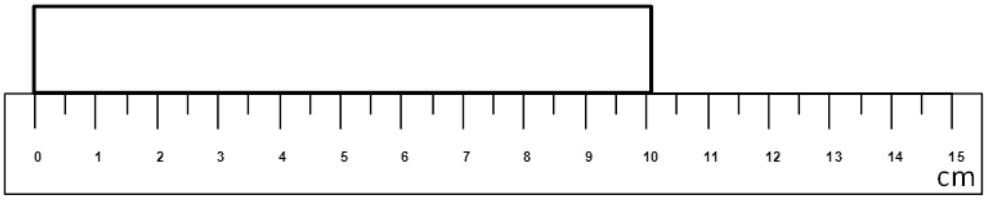
$$\delta = \frac{m_{MAX} - m_{MIN}}{2} = \frac{25 - 20}{2} = 2{,}5$$

$$m = \overline{m} \pm \delta m$$

$$\overline{m} = \frac{m_{MAX} + m_{MIN}}{2} = \frac{25 + 20}{2} = 22{,}5$$

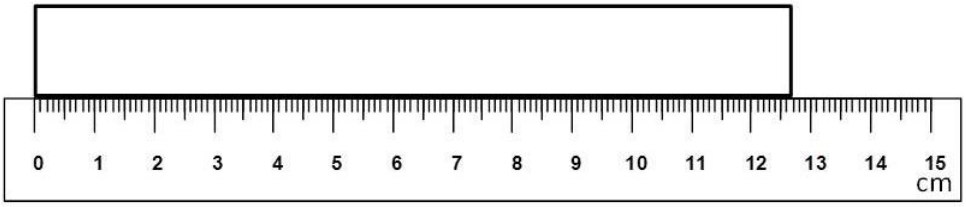
$$m = (22{,}5 \pm 2{,}5)\ cm$$

(b) Qual o comprimento da peça mostrada na figura abaixo?



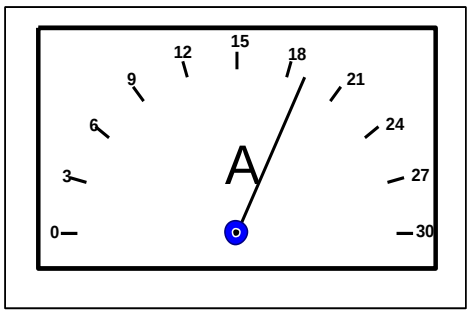
L = (±) cm

(c) Qual o comprimento da peça mostrada na figura abaixo?

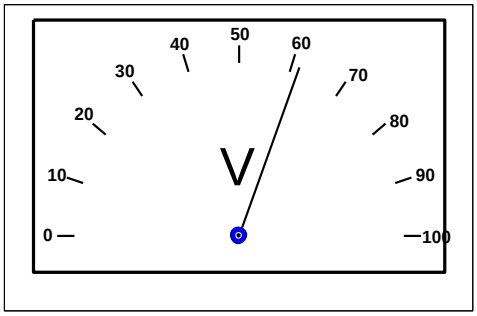


L = (±) cm

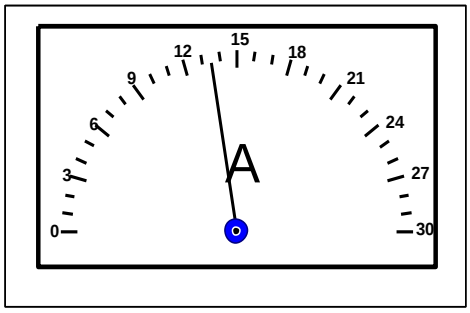
(d) Quais os valores das medidas nos instrumentos de medidas elétricas abaixo?



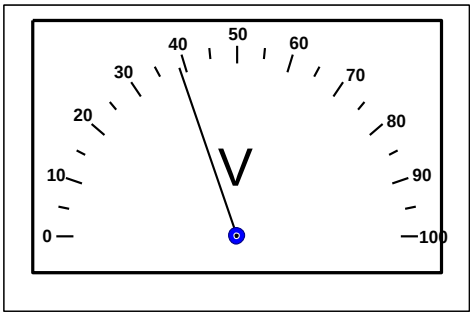
I = (±) A



V = (±) V



I = (±) A



V = (±) V

(e) Determinar a altura média dos alunos da classe, considerando uma amostra de 5 alunos, escolhidos aleatoriamente:

	x (m)	δ_i (m)	δ_i^2 (m^2)
1			
2			
3			
4			
5			
$\bar{x}$		Σ	

n = _____

$\bar{x}$ = _____

s = _____

x = (_____±_____) m

Obs.: Certamente que os 5 alunos escolhidos correspondem a uma amostra dentre todos os alunos da turma, por este motivo deve-se determinar o desvio padrão amostral.

(f) Considerando que a turma dos alunos do exemplo anterior fosse constituída por "apenas esses 5 alunos". Neste caso o desvio padrão a ser considerado é o populacional. Determine a altura média dos alunos desta turma de 5 alunos.

σ =_____ x = _____

(g) Em uma determinada prática de laboratório, onde se deseja medir o comprimento de uma determinada peça, foram efetuadas 5 medidas, conforme a tabela abaixo. Determine a medida do comprimento desta peça.

	L (cm)	δi	δ_i^2
1	12,52		
2	12,52		
3	12,49		
4	12,47		
5	12,51		
$\bar{\bar{L}}$		Σ	

n = _____

$\bar{\bar{L}}$ = _____

$\sigma_{\bar{L}}$ = _____

L = (_____±_____) cm

Resp.: (12,502 ± 0,009) m

Obs.: ***Em um caso ideal****, os comprimentos obtidos para as medidas da peça deveriam ser iguais, pois trata-se de um único comprimento que está sendo medido várias vezes. As variações obtidas nestas medições são inerentes ao processo de medir e é denominada por "****dispersão das medidas****", mas, mesmo assim, elas devem ter pequenas variações.* ***Neste caso o desvio padrão a ser considerado é o do valor médio****.*

(h) A massa de um cilindro de cobre foi medida quatro vezes e os valores encontrados estão assinalados na tabela abaixo. Determine a massa deste cilindro.

	m (g)	δ_i	δ_i^2
1	112,42		
2	112,38		
3	112,39		
4	112,45		
$\bar{m}$		Σ	

m = (_____±_____) g

Resp.: (112,410 ± 0,016) g

(i) Um pequeno corpo metálico cai livremente, a partir de uma determinada altura, e o tempo de queda é medido. O experimento é feito por 6 vezes, sempre com o mesmo corpo e mesma altura de queda. Determine o tempo de queda.

	t(s)	δ_i	δ_i^2
1	2,42		
2	2,47		
3	2,38		
4	2,54		
5	2,47		
6	2,49		
$\bar{\bar{t}}$		Σ	

t = (_____±_____) s

Resp.: (2,462 ± 0,015) s

Referência

TRIOLA, M. F. Introdução à Estatística, 7ª edição, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1999.

5. CLASSIFICAÇÃO DE ERROS

Os erros de medidas são geralmente classificados em: **sistemáticos, acidentais e grosseiros**.

Erros sistemáticos

São erros devido a fatores que atuam da mesma forma, contribuindo com o erro sempre no mesmo sentido. São provenientes de hábitos do operador (erro de paralaxe), imperfeição de instrumentos (o zero da escala não está correto), método empregado equivocadamente, ação de um agente externo, simplificações no modelo físico do problema estudado, entre outros.

Em princípio estes erros podem ser determinados e as medidas corrigidas, desde que se conheçam suas contribuições durante o processo de medida.

Erros acidentais

São erros devido a fatores casuais que se verificam ora em um sentido ora em outro, quase sempre não se repetindo entre duas medidas consecutivas. São erros atribuídos a fatores imprevisíveis e na maioria das vezes desconhecidos quanto à ocorrência e intensidade com que contribuem numa determinada medida. Em geral, a origem do erro acidental não está numa única causa, e sim é resultante de pequenas contribuições que ora determinam um valor mais alto, ora mais baixo, para a mesma medida. Estas causas podem ser conhecidas ou suspeitadas, mas nunca complemente eliminadas ou individualmente avaliadas. Neste tipo de erro, devido à ocorrência de modo aleatório, são usados métodos estatísticos para a análise das medidas.

Erros grosseiros

São erros devido à técnica não adequada ou imperícia do experimentador. Por exemplo, enganos de leituras, de digitação, de anotações e não organização do ambiente de trabalho, erros em manipulações numéricas e erros de manuseio inadequado do equipamento. Estes erros podem ser evitados repetindo-se as medidas.

Às vezes torna-se difícil separar o erro devido ao instrumento e devido ao observador, pois ambos fazem parte de todo o processo de medida. Os fabricantes de instrumentos em geral fornecem ou garantem que estes podem apresentar erros não superiores a um erro *E*, em determinadas condições de operação (por este motivo sempre é aconselhável a consulta aos manuais dos instrumentos). No caso do paquímetro com Vernier de 10 divisões, por exemplo, é garantido pelo fabricante que o mesmo não deve apresentar um erro superior a 0,1 mm, isto está explicito na própria escala. Quando não especificado

pelo fabricante ou não claramente determinado, pode se adotar um critério prático para estimar o erro de leitura, **toma-se a metade da menor divisão da escala**.

Os erros devidos à vizinhança do sistema (meio ambiente) são os mais frequentes. Suas origens são várias e dependem do tipo de experimento. Apenas para chamar a atenção citamos: variação da pressão atmosférica, temperatura, umidade do ar, aceleração da gravidade, etc. Quando identificadas suas contribuições, adotam-se soluções para minimizá-las, isto é, procura-se isolar o experimento e controlar a vizinhança.

6. ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

São todos os algarismos obtidos no processo de medida. Os zeros incluídos para localizar o ponto decimal não são significativos (zeros à esquerda).

Considere os exemplos a seguir:

1905,1	(5 algarismos significativos)
0,00034	(2 algarismos significativos)
1000	(4 algarismos significativos)
2×10^5	(1 algarismo significativo)
$4{,}180 \times 10^{-7}$	(4 algarismos significativos)

Em geral, a incerteza deve conter apenas UM (1) algarismo significativo. Logo, a incerteza deve ser arredondada após a sua determinação.

Mudança de Unidade

Ao mudar a unidade de uma medida é importante **não alterar o número de algarismos significativos**.

Ex.: 46 cm = 0,46 m (Está correto)

46 cm = 460 mm (errado, pois aumentou o número de algarismos significativos)

A notação em potência de dez evita este problema:

46 cm = 46×10^1 mm

A notação científica também soluciona este problema:

46 cm = $4{,}6 \times 10^2$ mm

Critérios de Arredondamento

O critério de arredondamento a ser utilizado é o mesmo empregado por calculadoras científicas e programas afins.

a) Se o número à direita do ponto de arredondamento for: 0, 1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ elimina-se a parte da direita.

Ex.: dado o número:	8 casas	4 casas	2 casas
0,563729452	0,56372945	0,5637	0,56

b) Se o número à direita do ponto de arredondamento for: 5, 6, 7, 8, 9 → incrementa-se o algarismo à esquerda e elimina-se a parte à direita.

Ex.: dado o número:	7 casas	5 casas	1 casa
0,563729452	0,5637295	0,56373	0,6

Usando o Arredondamento para Representar Medidas

Normalmente deve-se expressar a incerteza de uma medida com apenas um algarismo significativo. Ex.:

$$\text{Tensão elétrica} = (0{,}126446 \pm 0{,}0005885)\ \text{V}$$

Expressando a incerteza com 1 algarismo significativo:

$$\text{Tensão elétrica} = (0{,}126446 \pm 0{,}0006)\ \text{V}$$

O valor médio da medida deve ser expresso com o mesmo número de casas decimais que a incerteza (neste caso 4), logo o valor da medida deve ser ajustado para 4 casas decimais, com o arredondamento adequado, resultando:

$$\text{Tensão elétrica} = (0{,}1264 \pm 0{,}0006)\ \text{V}$$

Os arredondamentos somente devem ser efetuados no final de todas as contas.

Razão: cada arredondamento introduz erro (pequeno) e ao longo de diversas contas pode resultar em um número sem significado físico.

Operações Matemáticas com Medidas

Sempre que uma operação matemática é efetuada com duas medidas o resultado deve considerar as incertezas de cada medida a fim de determinar a incerteza do resultado da operação.

Existe uma formulação genérica que permite determinar a incerteza em qualquer operação matemática efetuada com uma ou mais medidas. Esta formulação leva em consideração os valores máximo e mínimo da operação e será explicada por meio de exemplos.

Ex.: Supondo duas medidas com suas respectivas incertezas:

$$\boldsymbol{A = a \pm \delta a} = (14{,}2 \pm 0{,}2)$$
$$\boldsymbol{B = b \pm \delta b} = (5{,}3 \pm 0{,}1)$$

a) ***Exemplo de adição:***

$$A + B = (a \pm \delta a) + (b \pm \delta b) = (a + b) \pm \frac{[MAX - MIN]}{2}$$

Maior valor que a operação pode assumir

$$MAX = (a + \delta a) + (b + \delta b)$$

Menor valor que a operação pode assumir

$$MIN = (a - \delta a) + (b - \delta b)$$

$$A + B = (14{,}2 \pm 0{,}2) + (5{,}3 \pm 0{,}1) = (14{,}2 + 5{,}3) \pm \frac{[MAX - MIN]}{2}$$

Maior valor que a operação pode assumir

$$MAX = (14{,}2 + 0{,}2) + (5{,}3 + 0{,}1) = 14{,}4 + 5{,}4 = 19{,}8$$

Menor valor que a operação pode assumir

$$MIN = (14{,}2 - 0{,}2) + (5{,}3 - 0{,}1) = 14{,}0 - 5{,}2 = 19{,}2$$

$$A + B = (14{,}2 + 5{,}3) \pm \frac{[19{,}8 - 19{,}2]}{2} = 19{,}5 \pm 0{,}3$$

b) Exemplo de Subtração:

$$A - B = (a \pm \delta a) - (b \pm \delta b) = (a - b) \pm \frac{[MAX - MIN]}{2}$$

Maior valor que a operação pode assumir

$$MAX = (a + \delta a) - (b - \delta b)$$ (cuidado com os sinais)

Menor valor que a operação pode assumir

$MIN = (a - \delta a) - (b + \delta b)$ (cuidado com os sinais)

$$A - B = (14{,}2 \pm 0{,}2) + (5{,}3 \pm 0{,}1) = (14{,}2 - 5{,}3) \pm \frac{[MAX - MIN]}{2}$$

Maior valor que a operação pode assumir

$MAX = (14{,}2 + 0{,}2) - (5{,}3 - 0{,}1) = 14{,}4 - 5{,}2 = 9{,}2$

Menor valor que a operação pode assumir

$MIN = (14{,}2 - 0{,}2) - (5{,}3 + 0{,}1) = 14{,}0 + 5{,}4 = 8{,}6$

$$A - B = (14{,}2 - 5{,}3) \pm \frac{[9{,}2 - 8{,}6]}{2} = 8{,}9 \pm 0{,}3$$

c) Exemplo de Multiplicação:

$$A \times B = (a \pm \delta a) \times (b \pm \delta b) = (a \times b) \pm \frac{[MAX - MIN]}{2}$$

Maior valor que a operação pode assumir

$MAX = (a + \delta a) \times (b + \delta b)$

Menor valor que a operação pode assumir

$MIN = (a - \delta a) \times (b - \delta b)$

$$A \times B = (14{,}2 \pm 0{,}2) \times (5{,}3 \pm 0{,}1) = (14{,}2 \times 5{,}3) \pm \frac{[MAX - MIN]}{2}$$

Maior valor que a operação pode assumir

$MAX = (14{,}2 + 0{,}2) \times (5{,}3 + 0{,}1) = 14{,}4 \times 5{,}4 = 77{,}76$

Menor valor que a operação pode assumir

$MIN = (14{,}2 - 0{,}2) \times (5{,}3 - 0{,}1) = 14{,}0 \times 5{,}2 = 72{,}8$

$$A \times B = (14{,}2 \times 5{,}3) \pm \frac{[77{,}76 - 72{,}8]}{2} = 75{,}26 \pm 2{,}48 = 75 \pm 2$$

d) Exemplo de Divisão:

$$\frac{A}{B} = \frac{(a \pm \delta a)}{(b \pm \delta b)} = \left(\frac{a}{b}\right) \pm \frac{[MAX - MIN]}{2}$$

Maior valor que a operação pode assumir

(cuidado com os sinais)

$$MAX = \frac{(a + \delta a)}{(b - \delta b)}$$

Menor valor que a operação pode assumir

$$MIN = \frac{(a - \delta a)}{(b + \delta b)}$$ (cuidado com os sinais)

$$\frac{A}{B} = \frac{(14{,}2 \pm 0{,}2)}{(5{,}3 \pm 0{,}1)} = \left(\frac{14{,}2}{5{,}3}\right) \pm \frac{[MAX - MIN]}{2}$$

Maior valor que a operação pode assumir

$$MAX = \frac{(14{,}2 + 0{,}2)}{(5{,}3 - 0{,}1)} = \frac{14{,}4}{5{,}2} = 2{,}76923$$ (apenas as 5 primeiras casas decimais)

Menor valor que a operação pode assumir

$$MIN = \frac{(14{,}2 - 0{,}2)}{(5{,}3 + 0{,}1)} = \frac{14{,}0}{5{,}4} = 2{,}59259$$ (apenas as 5 primeiras casas decimais)

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{14{,}2}{5{,}3}\right) \pm \frac{[2{,}76923 - 2{,}59259]}{2} = 2{,}67924 \pm 0{,}08832 = 2{,}68 \pm 0{,}09$$

e) Exemplo de Exponenciação

$$B^3 = (b \pm \delta b)^3 = (b)^3 \pm \frac{[MAX - MIN]}{2}$$

Maior valor que a operação pode assumir

$$MAX = (b + \delta b)^3$$

Menor valor que a operação pode assumir

$$MIN = (b - \delta b)^3$$

$$B^3 = (5{,}3 \pm 0{,}1)^3 = (5{,}3)^3 \pm \frac{[MAX - MIN]}{2}$$

Maior valor que a operação pode assumir

$$MAX = (5{,}3 + 0{,}1)^3 = (5{,}4)^3 = 157{,}464$$

Menor valor que a operação pode assumir

$$MIN = (5{,}3 - 0{,}1)^3 = (5{,}2)^3 = 140{,}608$$

$$B = (5{,}3)^3 \pm \frac{[157{,}464 - 140{,}608]}{2} = 148{,}877 \pm 8{,}428 = 149 \pm 8$$

f) Outros exemplos:

$(65{,}32 \pm 0{,}05)^{1/2} = ?$

$MIN = (65{,}27)^{1/2} = 8{,}07895$

$MAX = (65{,}37)^{1/2} = 8{,}085172$

$$\delta(65{,}32)^{1/2} = \frac{(8{,}085172 - 8{,}078985)}{2} = \frac{0{,}006187}{2} = 0{,}0030935$$

$(65{,}32 \pm 0{,}05)^{1/2} = (65{,}32)^{1/2} \pm \delta(65{,}32 \pm 0{,}05)^{1/2} = 8{,}082 \pm 0{,}003$

$\cos(63{,}5 \pm 0{,}2)° = ?$

$MIN = \cos 63{,}7° = 0{,}443071$

$MAX = \cos 63{,}3° = 0{,}449319$

$$\delta \cos(63{,}5 \pm 0{,}2)° = \frac{(0{,}449319 - 0{,}443071)}{2} = \frac{0{,}006248}{2} = 0{,}003124$$

$\cos(63{,}5 \pm 0{,}2)° = \cos 63{,}5° \pm \delta \cos(63{,}5 \pm 0{,}2)° = 0{,}446 \pm 0{,}003$

Exercícios – Algarismos significativos e propagação de erros

1) Um paralelepípedo retângulo, de base quadrada, possui massa (550,4 $\pm$ 0,7) g. As suas arestas da base medem A = (54,80 ± 0,01) mm e a altura h = (34,20 ± 0,02) mm. Determine:

Área da base:

S_{Base} =_____,

Volume:

V =_____

Densidade:

ρ = _____

2) Faça arredondamentos até o algarismo em negrito.

a) 12,7**5**58 =

b) 25,3**4**523 =

c) 0,0**2**378 =

d) 27**8**9 =

e) 0,05**4**7×10^{-3} =

f) 56**0**2,573 =

3) Faça as devidas mudanças de unidade indicadas:

a) 2,5 m $\rightarrow$ km

b) 25g $\rightarrow$ kg

c) 0,1m $\rightarrow$ km

4) Considere os números na forma explícita:

A = (2,34 ± 0,02) m

B = (12,5 ± 0,5) m

C = (2,4 ± 0,2) m

Efetue as operações indicadas:

a) $A + B =$

b) $A - B =$

c) $A \cdot B =$

d) $B + C =$

e) $A/C =$

f) $(A + B)/A =$

g) $A + B + C =$

5) Determine os valores das expressões abaixo.

a) $(2{,}4 \pm 0{,}3)^{1/2}$ =

b) $(54{,}25 \pm 0{,}02)^{3}$ =

c) cos $(25{,}23 \pm 0{,}06)$ =

d) tg $(45{,}0 \pm 0{,}5)$ =

e) $e^{(2{,}4 \pm 0{,}2)}$ =

6) Calcule a o volume e a superfície de uma esfera de raio igual a $(5{,}67 \pm 0{,}04)$ cm.

7) Calcule o volume de uma pirâmide de base quadrada cujo lado é (33,55 ± 0,05) cm e a altura é (60,2 ± 0,4) cm.

8) Calcule o volume e a área de um cilindro de raio (25,3 ± 0,2) cm e comprimento (12,0 ± 0,5) cm.

7. INSTRUMENTOS DE MEDIDAS: PAQUÍMETRO E MICRÔMETRO

Utilização do paquímetro

O paquímetro é um instrumento que serve para medir comprimentos, diâmetros de fios, diâmetros externos e internos de tubos, *etc.* com precisão da ordem de centésimos de milímetro. Ele é empregado em situações que exigem mais precisão do que pode ser obtido com instrumentos mais comuns, tais como régua ou trena, como, por exemplo, na fabricação de peças mecânicas.

O instrumento (figura 1) consiste de uma régua metálica graduada terminada por uma espera fixa, ao longo da qual desliza um cursor móvel onde está gravada uma escala auxiliar chamada nônio ou vernier. Quando as duas esperas se tocam o zero do nônio deve coincidir com o zero da escala principal. Existe também um parafuso que permite fixar o nônio à régua principal, cuja função é travar o aparelho para que se possa fazer a leitura na posição mais conveniente para o operador sem risco de deslocamento do nônio.

Um aspecto importante da utilização do paquímetro é que, por ser um instrumento de precisão, sua operação requer mais cuidado que o necessário para outros instrumentos de menor qualidade. Isso acontece porque erros cometidos por manipulação inadequada, que não são visíveis nos outros instrumentos, alteram a leitura do paquímetro, produzindo medidas incorretas. É importante ressaltar também que *erros da ordem de centésimos de milímetro não são visíveis a olho nu, mas são perceptíveis com o paquímetro.* Isso significa que esses erros são difíceis de serem notados e corrigidos *a posteriori;* em vez disso, eles devem ser evitados através de manuseio correto do instrumento. A figura 2 ilustra as maneiras corretas e erradas de uso do aparelho.

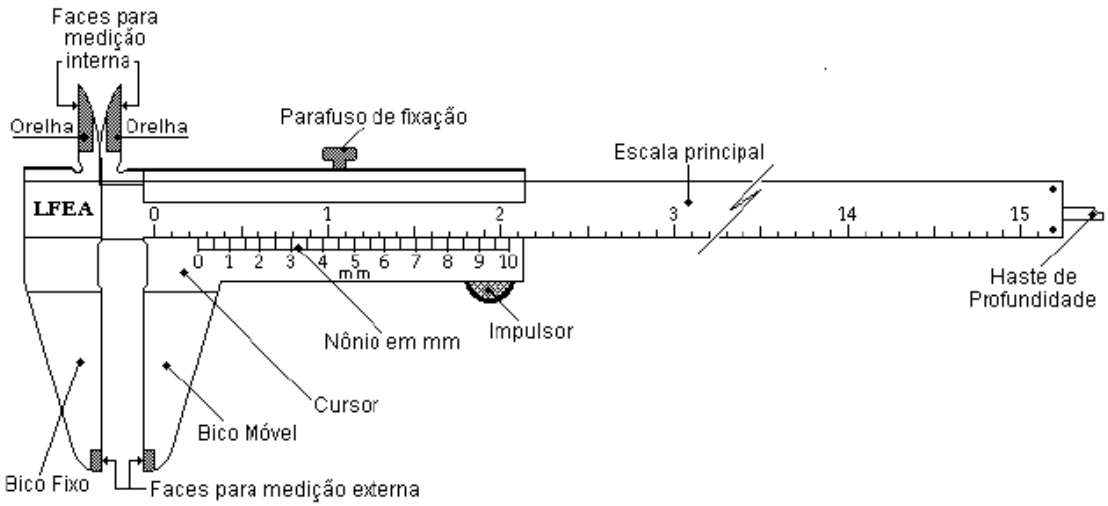


Figura 1. Identificação das principais partes de um paquímetro.

A escala principal e o nônio são construídos com precisão e têm qualidade suficiente para medir frações bastante pequenas da sua menor divisão (em geral milímetro). É necessário então um

modo de determinar essas frações de divisão. Uma maneira seria fazer marcas a distâncias menores, compatíveis com a qualidade da escala, porém essas marcas seriam tão próximas que a vista humana não seria capaz de distingui-las. O nônio é usado para determinar essas frações, como explicado a seguir.

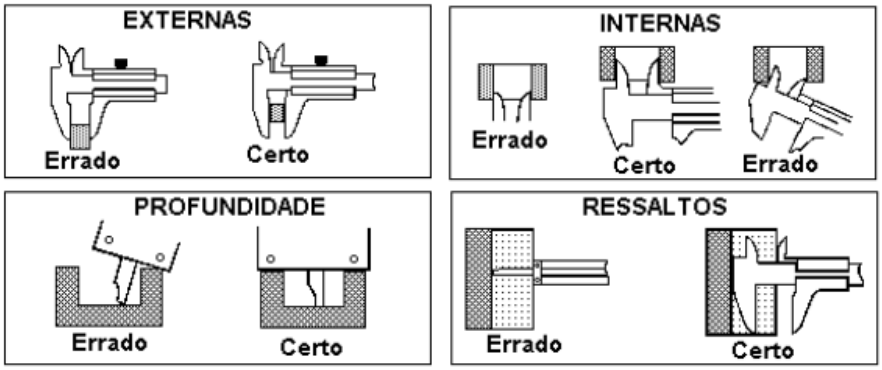


Figura 2 – Maneiras certas e erradas do uso do paquímetro.

O nônio ou vernier é um dispositivo que permite efetuar a leitura da fração da menor divisão de uma régua ou qualquer escala graduada à qual esteja adaptado. Sua invenção é atribuída a Pedro Nunes (português) e também a Pierre Vernier (francês). Ele é constituído de uma pequena escala que se move ao longo de uma régua principal com divisões de valor conhecido (1 mm ou 1 grau, por exemplo). As divisões do nônio possuem tamanho diferente daquelas da escala principal. No exemplo da figura 3 o nônio possui N = 10 divisões que correspondem em comprimento a $N - 1 = 9$ divisões da escala principal. Cada divisão do nônio é mais curta que uma divisão da escala principal de 1/10 de divisão desta última.

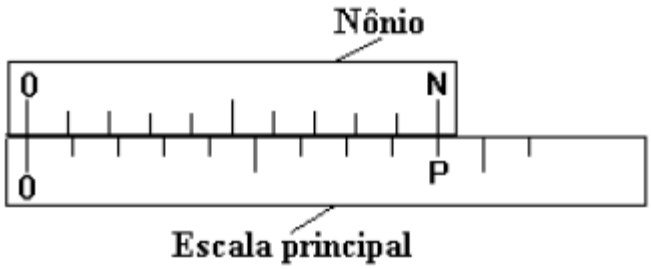


Figura 3 – Esquema de um nônio de precisão de 0,1 mm.

A figura 4 mostra o nônio deslocado para a direita de certa distância, que é a dimensão a ser medida. Observa-se que o zero do nônio está entre duas marcas da escala principal. A distância entre o zero do nônio e a marca a sua esquerda na régua é chamada de fração de divisão. Ela é dada pelo número do traço do nônio que está alinhado com algum da escala principal multiplicado por $1/N$. Por exemplo, na figura 4 a sétima marca do nônio coincide com uma (a oitava) da escala principal num nônio de 1/10, o que significa que a fração de divisão é $7 \times 1/10 = 0{,}7$ e a distância total que o nônio foi deslocado é 1,70 unidade da escala principal.

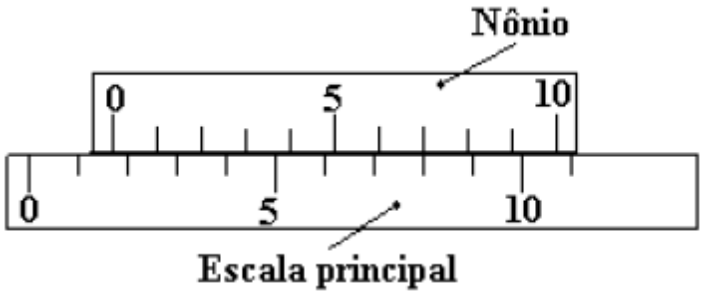


Figura 4 – Vista da medida de 1,70 (cm se a escala principal for em cm) e precisão de 0,01 mm.

Muitos instrumentos são fabricados de modo que suas precisões sejam diferentes de 1/10. Na figura 5 é mostrado, na posição zero, o nônio utilizado nos paquímetros do laboratório, que é dividido em 20 partes. Observe que a vigésima divisão do nônio (indicada pelo número 10 mas corresponde a 20 divisões) coincide com a marca de 19 mm, correspondendo a $N - 1 = 19$ divisões da régua principal. Na figura 6 observamos que o zero do nônio está entre as marcas 72 e 73 da régua principal. Para determinar essa fração de milímetro notamos que a marca 14 do nônio está alinhada com um traço da escala principal, portanto a fração de milímetro é dada por $14 \times 1/20 = 0{,}7$ e a leitura será 72,70 mm.



Figura 5 – Nônio com precisão de 0,05 mm.



Figura 6 – Medida de (72,70 ± 0,03) mm.

Pode-se perguntar se sempre haverá alinhamento de uma das marcas do nônio com algum traço da escala principal. Para vermos em que condições isso ocorre utilizamos a figura 3. A marca do zero na escala do nônio coincide com a marca correspondente na escala principal, a primeira marca do nônio está 1/10 de divisão à esquerda da primeira marca da escala principal, a segunda parca do nônio está a 2/10 do alinhamento com a da régua e assim por diante, até que a décima marca do nônio coincide com a nona marca da escala principal. Isso significa que se deslocarmos o nônio de 1/10 de divisão para a direita haverá alinhamento de sua primeira marca com a da régua principal, se o deslocarmos de 2/10 seu segundo traço estará alinhado e assim sucessivamente. Portanto teremos alinhamento a cada

deslocamento de 1/N na divisão da escala principal. Essa distância é pequena para os paquímetros precisos, fazendo com que a medida sempre possa ser feita.

Esse argumento também mostra porque quando o traço p do nônio está alinhado com alguma marca da régua a fração de divisão é dada diretamente por p/N da divisão, como explicado acima.

A precisão de uma escala é a variação da grandeza correspondendo a duas marcações consecutivas. No caso do paquímetro os traços nas réguas são separados por aproximadamente 1 mm, porém essa não é a precisão porque a medida não é feita lendo diretamente o tamanho da peça na escala. O que distingue duas leituras no paquímetro é o número do traço no nônio que fica alinhado com uma marca na régua principal, o que significa que a precisão é a diferença é $1/N$ da divisão da escala principal, portanto essa é a precisão do instrumento. Tomando como exemplo o nônio de 20 divisões, a precisão será de 1/20 = 0,05 mm, e a incerteza de uma medida será 0,05/2 = 0,025 ≈ 0,03 mm.

Prática com paquímetro

1. Determine a precisão do paquímetro fornecido ao grupo.
2. Qual será a incerteza nas medidas que efetuará com o paquímetro a seguir?
3. Meça a massa da peça fornecida.
4. Qual a precisão da balança?
5. Qual a incerteza na medida da massa?
6. Represente o valor da massa na forma explícita.
7. Meça com o paquímetro, pelo menos três vezes, as dimensões necessárias para o cálculo do volume. Represente o volume da peça na forma explícita.
8. Determine a densidade da peça na forma explícita, utilizando a teoria de propagação de erros.

Micrômetro ou Palmer

O micrômetro é um instrumento de precisão que consiste basicamente de um parafuso micrométrico preso a uma estrutura em forma de U, capaz de mover-se ao longo de seu eixo.

O objeto a ser medido é colocado entre a espera fixa **P** e a extremidade móvel do parafuso micrométrico **P'** conforme a Figura 7. Uma escala é gravada no braço fixo (escala principal ou geratriz) através do qual gira o parafuso e este por sua vez é solidário ao tambor, possuindo uma escala circular.

Nos tipos mais comuns de micrômetros a escala principal é gravada em milímetros. O passo é de 0,50 mm e a escala do tambor possui 50 divisões, ou seja, sua precisão é de 0,50/50 = 0,01 mm (duas voltas do tambor produzem um deslocamento de 1 mm no parafuso).

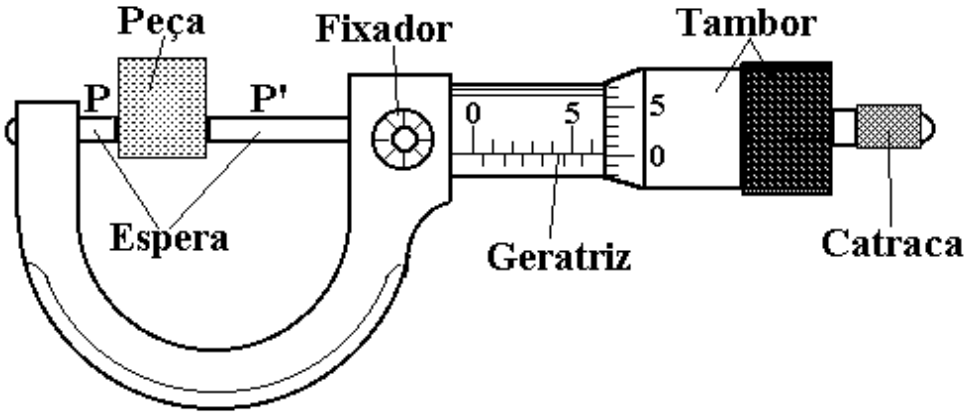


Figura 7 - Vista esquemática de um Micrômetro.

Leitura com o micrômetro

Para efetuar uma leitura, verifica-se inicialmente qual a última divisão da escala principal (geratriz), na parte superior, que é deixada descoberta pelo tambor (L_0). Na escala principal (geratriz), a parte inferior serve para indicar se o tambor já deu uma volta e, deve-se, portanto, somar 50 divisões àquela lida no tambor. Caso a marca inferior não esteja descoberta faz-se somente a leitura do tambor, veja os exemplos abaixo.

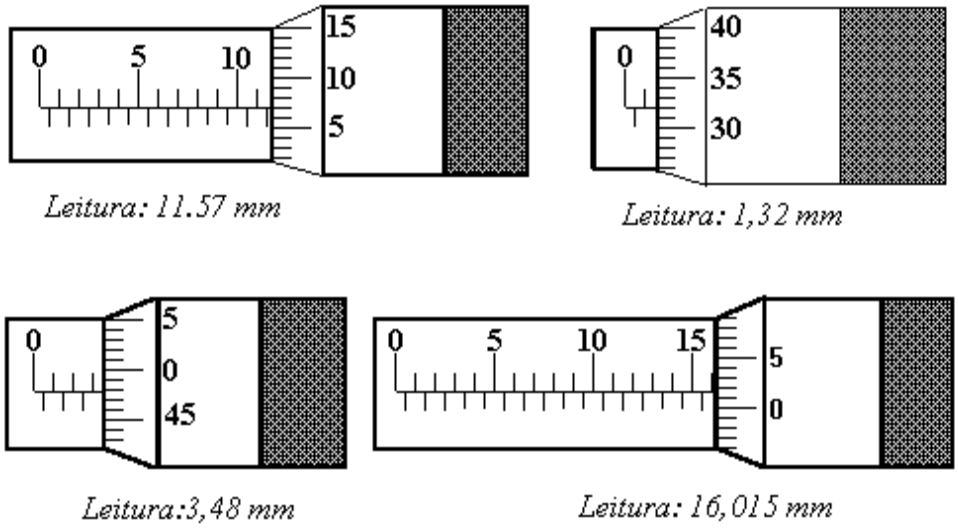


Figura 8 - Exemplos de medidas.

As leituras na forma explícitas ficariam escritas como: (11,570 ± 0,005) mm; (1,320 ± 0,005) mm; (3,480 ± 0,005) mm e (16,015 ± 0,005) mm.

Para cada figura abaixo faça a leitura na forma explícita.

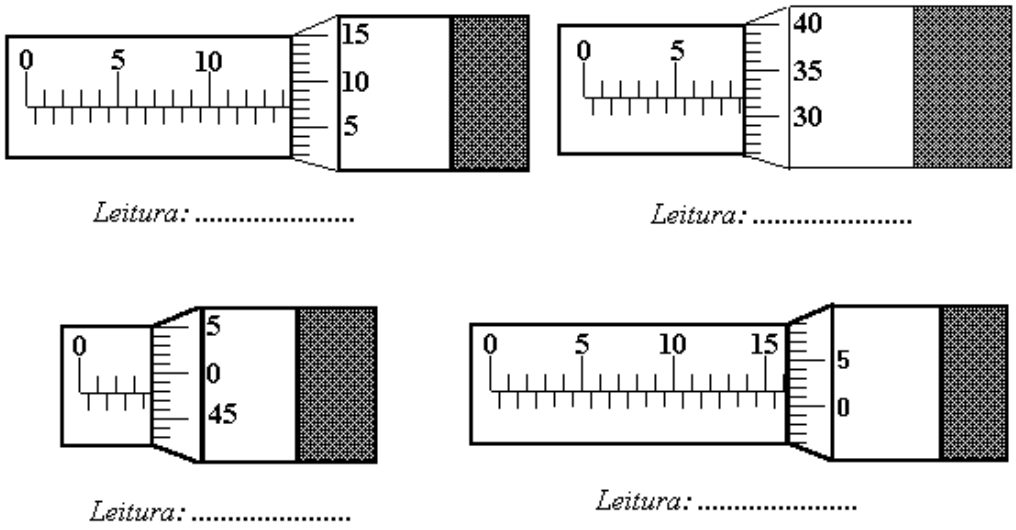


Figura 9 - Exercícios sobre micrômetro.

Exercício prático sobre micrômetro e gráfico

Com um pacote de tiras de papel faça 10 medidas (explícitas) da espessura de um conjunto de folhas. Para isto use um micrômetro. Faça um gráfico da espessura *versus* nº de folhas e determine os parâmetros da melhor reta que passa pelos pontos. Inicialmente faça um ajuste "visual" da reta e obtenha os coeficientes angular e linear da reta traçada. Em seguida use o método dos mínimos quadrados para obter os coeficientes angular e linear da reta. Faça a superposição sobre o gráfico desta nova reta obtida. Verifique e discuta a possíveis diferenças entre as duas retas.

Medida	Nº de Folhas ( )	Espessura (±)
01		
02		
03		
04		
05		
06		
07		
08		
09		
10		

8. TABELA DE EXPERIMENTOS

Bloco I

EXPERIÊNCIAS	1ª semana	2ª semana	3ª semana	4ª semana
Determinação da aceleração de um corpo usando conceitos cinemáticos (MRUV) e dinâmicos	**G1 & G2**	**G7 & G8**	**G5 & G6**	**G3 & G4**
Constante elástica da mola e as associações em série e paralelo	**G3 & G4**	**G1 & G2**	**G7 & G8**	**G5 & G6**
Movimento Parabólico	**G5 & G6**	**G3 & G4**	**G1 & G2**	**G7 & G8**
Equilíbrio de Forças: Experimentos 1 e 2	**G7 & G8**	**G5 & G6**	**G3 & G4**	**G1 & G2**

Bloco II

EXPERIÊNCIAS	1ª semana	2ª semana	3ª semana	4ª semana
Força Centrípeta	**G1 & G2**	**G7 & G8**	**G5 & G6**	**G3 & G4**
Conservação de Energia	**G3 & G4**	**G1 & G2**	**G7 & G8**	**G5 & G6**
Impulso e Colisões em uma Dimensão	**G5 & G6**	**G3 & G4**	**G1 & G2**	**G7 & G8**
Colisões Bidimensionais	**G7 & G8**	**G5 & G6**	**G3 & G4**	**G1 & G2**

9. Determinação da Aceleração de um Corpo (Cinemática e Dinâmica)

1. Objetivo

Aplicação dos conceitos da cinemática e dinâmica no movimento de uma partícula.

2. Material

Trilho de ar, insuflador e carro, roldana com sensor eletrônico, cabos de conexão e fio, computador com interface, massas, suporte, balança eletrônica e paquímetro.

3. Questionário de estudo

Considere um corpo em movimento retilíneo:

3.1 Quando um corpo pode ser representado como uma partícula?

3.2 Qual a definição de velocidade escalar média? E velocidade escalar instantânea?

3.3 Que grandeza física caracteriza uma alteração na velocidade de um corpo?

3.4 Qual a forma dos gráficos: posição × tempo, velocidade x tempo e aceleração × tempo para um movimento retilíneo uniforme e um movimento retilíneo uniformemente variado?

3.5 É necessária a ação de uma força para manter um corpo sobre uma superfície sem atrito e com velocidade constante? E para mantê-lo com aceleração constante ?

3.6 O que diz a 1o Lei de Newton ou a Lei da Inércia?

3.7 O que diz a 2o Lei de Newton para o movimento?

4. Metodologia.

Nesta experiência vamos utilizar um conjunto da PASCO composto de trilho de ar, interface de coleta de dados, programas de coleta e tratamento de dados experimentais. Este conjunto pode ser usado para realizar vários experimentos de Física. O uso do trilho de ar tem a grande vantagem de minimizar os efeitos do atrito.

A figura 1 mostra o arranjo experimental. O carro está ligado ao suporte de massas por um fio. Este fio tem massa desprezível e passa por uma roldana com dispositivo eletrônico de medida de tempo. A leitura eletrônica de tempo é feita da seguinte maneira: a roldana é composta por dez setores vazados e dez cheios de mesmo tamanho. Através da medida do intervalo de tempo entre dois setores pode-se determinar o correspondente deslocamento linear do corpo. Portanto, nesta prática se obtém, para

deslocamentos constantes, diferentes intervalos de tempo, uma vez que se trata de um movimento acelerado.

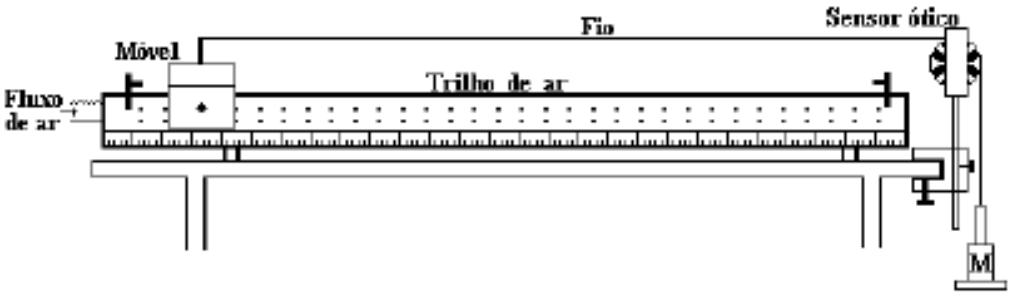


Figura 1 – Esquema da montagem experimental

Através das medidas da posição e tempo é possível fazer uma análise cinemática do movimento, calculando velocidade e aceleração do carro sobre o trilho. Por outro lado, conhecendo-se as massas envolvidas no problema em estudo, pode-se aplicar as Leis de Newton e determinar a aceleração.

5. Procedimento Experimental

5.1 - Procedimento no Microcomputador

5.1.1 Ligue o computador e pressione o botão I/O para energizar a interface.

5.1.2 Conecte o sensor da polia na interface.

5.1.3 No Desktop do Windows acesse o programa Data Studio. Na janela, click em abrir uma atividade, encontre a pasta arquivos data Studio e abra o arquivo mruv.sp.

5.1.4 Após a abertura do arquivo estarão visíveis as janelas – procedimento, tabelas e o vídeo ilustrativo.

5.1.5 No menu suspenso click em configurar. Abre-se uma janela com a imagem da interface e um ícone mostrando os sensores ligados à mesma.

5.1.6 Conecte o cabo USB da interface em uma das entradas do computador. Para conectar o sensor click sobre o texto “Clicar e conectar sensor”. Quando o sensor estiver conectado, o botão iniciar estará habilitado.

5.2 - Prática experimental

5.2.1 Observe a montagem de acordo com a figura 1.

5.2.2 Certifique-se de que a fonte de ar esteja ligada e na posição 3,5.

5.2.3 Verifique se o trilho está perfeitamente alinhado e nivelado.

5.2.4 Coloque o carro sobre o trilho e o conecte ao suporte de massas através do fio. Escolha um comprimento de fio adequado de modo a não deixar o suporte com massas atingir o chão.

5.2.5 Verifique se o fio que liga o carro às massas está paralelo ao trilho de ar.

5.2.6 Verifique se o led no sensor da polia está funcionando. Isso significa que a partir de agora o computador está apto a fazer a leitura dos intervalos de tempo correspondentes ao movimento da roldana.

5.2.7 Solte o carro, que deve estar o máximo possível afastado da roldana e o deixe transladar sobre o trilho de ar apenas sob a influência da massa pendurada no suporte.

5.2.8 Um instante antes, de o carrinho tocar o suporte com elástico, pressione o botão Parar para concluir a coleta de dados. Os dados são registrados de acordo com seus lançamentos individualmente na forma de duas colunas: posição e intervalo de tempo.

5.2.9 Repita os quatro últimos procedimentos fazendo mais quatro lançamentos. Escolha um conjunto de dados para a análise dos resultados.

Observação: Não coloque (e nem deixe) o carro sobre o trilho enquanto o insuflador estiver desligado.

5.2.10 Os dados selecionados podem ser salvos num arquivo próprio ou transformados em arquivo PDF via impressora PDF.

5.2.11 Meça e anote a massa do carro e aquela que produz tração no carro.

Carrinho (kg)	*Massa de tração* (kg)

6. Análise dos dados experimentais

Utilizando o papel milimetrado

6.1 Escolha, na tabela de dados coletados do DataStudio, 10 pontos ou coordenadas (Posição, Tempo) e faça o gráfico Posição *versus* Tempo no papel milimetrado. Sugestão, escolha pontos igualmente separados uns dos outros, abrangendo pontos do início ao fim do movimento.

6.2 Que tipo de equação descreve a curva do gráfico gerado?

6.3 O que representa o coeficiente angular da **reta tangente** à curva Posição *versus* Tempo em um dado instante?

6.4 Trace uma reta tangente à curva em cada ponto no gráfico e determine o coeficiente angular nestes pontos.

6.5 Faça o gráfico Velocidade *versus* Tempo com os resultados obtidos no item anterior.

6.6 No gráfico, velocidade versus tempo, obtenha o coeficiente angular. O que representa este coeficiente angular?

6.7 O carro pode ser representado por uma partícula? Por quê?

6.8 Construa um diagrama de forças para o carro e para a massa pendurada.

6.9 Qual é a expressão para a aceleração obtida através das leis da dinâmica? Determine seu valor. Determine a tensão (tração) na corda. Ela é maior, menor, ou igual ao peso do corpo suspenso?

6.10 O que acontece se o fio que conecta o carro às massas não estiver paralelo ao trilho?

6.11 Compare e discuta os valores das acelerações obtidos através da cinemática e da dinâmica.

6.12 Discuta os resultados experimentais obtidos comparando-os com os previstos pela cinemática da partícula.

Utilizando o Data Studio

Salve os dados experimentais. O Data Studio gera um gráfico para nossa análise, se preferir utilize outro programa de confecção de gráficos ou use o papel milimetrado para a construção dos gráficos. O procedimento abaixo é referente ao Data Studio.

6.13 Que tipo de equação descreve a curva do gráfico gerado?

6.14 O que representa o coeficiente angular da reta tangente à curva Posição *versus* Tempo em um dado instante?

6.15 Para obter este coeficiente, iremos dar um zoom na tela. Click no botão , e em seguida selecione uma região do gráfico (click na tela abrindo uma janela). Com os pontos mais visíveis, click no botão , para obter o coeficiente angular no ponto. Determine a velocidade instantânea para no mínimo cinco pontos. Para selecionar um ponto qualquer no gráfico, repita o procedimento para obter um zoom da região desejada e depois click no botão . No centro da tela aparece um eixo de coordenadas com um quadrado no centro. Movimente o cursor sobre o mesmo, o cursor mudará de forma, quando isto ocorrer, click e arraste até a posição desejada. Os números entre parênteses são os valores das coordenadas.

6.16 No gráfico, velocidade versus tempo, obtenha o coeficiente angular. O que representa este coeficiente angular?

7. Bibliografia

Fundamental

- Fundamentos de Física. D. Halliday and R. Resnick, Vol. 1, 1994. Capítulo:2 – Seções: 1 – 6. Capítulo 5 – Seções: 1 – 9.
- Física – P. Tipler, vol. 1.

Complementar

- Física; Sears, Zemansky e Young; Vol. 1; Capítulo – Seção: 5, 1990.
- Física – Fundamentos e Aplicações. R.M. Eisberg, L.S. Lerner, Vol. 1,1983. Capítulo: 2 – Seções: 1 – 7. Capítulo: 4 – Seções: 1 – 6. Capítulo 5 – Seções: 1 e 3.
- Curso de Física Básica – Mecânica; Nussenzveig, H. M.; Mecânica Vol. 1, 2002.

10. Constante Elástica de uma Mola e as Associações em Série e Paralelo

1. Objetivo

Determinar a constante elástica de uma mola por métodos gráficos. Determinar a constante elástica resultante de uma associação de molas.

2. Material

Um suporte com régua, duas molas e diversas massas.

3. Questionário para estudo

3.1 Enuncie a lei de Hooke.

3.2 Qual a unidade da constante elástica de uma dada mola nos sistemas SI e CGS?

3.3 O que é limite de elasticidade de uma mola ou um corpo qualquer?

3.4 Um corpo suspenso por uma mola está sujeito à ação de forças. Faça um diagrama do corpo livre, i. é, mostrar todas as forças que atuam sobre o corpo.

3.5 Um corpo de (100,00 ± 0,02) g é suspenso em uma mola. Quando o equilíbrio é atingido à mola alongou-se de (8,4 ± 0,1) mm. Qual o valor da constante elástica da mola?

3.6 Considerando a mesma mola do índice anterior, qual deve ser o alongamento da mola para suspender uma massa de (10,5 ± 0,1) g?

3.7 Mostre como pode ser calculada a constante elástica equivalente para um sistema com molas em paralelo e em série.

4. Procedimento experimental

4.1 Coloque a mola no suporte, juntamente com o prato e, meça o comprimento da mola (L_0). Este comprimento corresponde ao estado de equilíbrio da mola, ou seja, será a marca 0 (zero de deformação). Dessa forma, a deformação causada pelo prato e o próprio peso da mola não influencia na deformação.

4.2 Suspenda as diversas massas fornecidas na mola e meça o comprimento da mola (L), tendo o cuidado de tomar sempre o mesmo ponto de referência, anotando-o numa tabela 1. Tenha muita atenção com o erro de paralaxe.

4.3 Calcule a força exercida por cada massa sobre a mola e anote na tabela 1.

4.4 Calcule a constante elástica *k* para cada ponto.

4.5 Calcule a média aritmética da constante elástica da mola e anote na tabela 1.

Tabela 1 – Tabela de coleta de dados experimentais MOLA 1.

Medida	Massa ( )	$\Delta L = L - L_0$ ( )	F ( )	k ( )
0				
1				
2				
3				
4				
5				
				Média =

4.6 Troque a mola e repita o procedimento dos ao 4-1 a 4-5.

Tabela 2 – Tabela de coleta de dados experimentais MOLA 2.

Medida	Massa ( )	$\Delta L = L - L_0$ ( )	F ( )	k ( )
0				
1				
2				
3				
4				
5				
				Média =

4.7 Faça uma montagem das molas em série e em paralelo e repita o procedimento dos itens 4.1 a 4.5.

Tabela 3 – Tabela de coleta de dados experimentais Associação em Série.

Medida	Massa ( )	$\Delta L = L - L_0$ ( )	F ( )	k ( )
0				
1				
2				
3				
4				
5				
				Média =

Tabela 4 – Tabela de coleta de dados experimentais Associação em Paralelo.

Medida	Massa ( )	$\Delta L = L - L_0$ ( )	F ( )	k ( )
0				
1				
2				
3				
4				
5				
				Média =

5. Análise dos dados experimentais

5.1 Faça um gráfico de F versus ΔL, no mesmo papel milimetrado.

5.2 Determine as constantes k das molas a partir dos gráficos.

5.3 Determine a constante elástica das molas

5.4 Determine as constantes elásticas das molas nas associações em série e paralelo.

6. Questões

6.1 Duas molas de mesma forma e material tem comprimentos diferentes (L_0). Qual delas tem maior valor de constante elástica (k).

6.2 Uma mola colocada na horizontal tem um determinado comprimento L_0. Quando colocada na posição vertical (sem qualquer massa suspensa) tem o mesmo L_0? Se não, explique!

6.3 O fato de se ter desprezado no experimento a posição vertical da mola e o suporte das massas, implicaria em erros experimentais? Justifique sua resposta!

6.4 Compare os valores das constantes elásticas de cada mola com as associações feitas, levando em conta as associações em série e paralelo.

7. Bibliografia

- Física – Halliday e Resnick; Vol. 1; Seção: 7-4; Vol. 3; Seção 27-4.
- Física – P. Tipler, Vol. 1, 1994.

Complementar

- Curso de Física Berkeley, Mecânica, Cap. 5, 1970.

11. Movimento Parabólico

1. Objetivo

Estudar o movimento de projéteis lançados horizontalmente.

2. Material

Rampa de lançamento, suportes, 2 esferas, nível, anteparo de madeira, papel branco e papel carbono, balança e trena.

3. Introdução

O Movimento uniformemente acelerado de partícula em três dimensões tem como característica a aceleração constante em módulo e direção.

No caso geral de uma partícula em movimento sob ação apenas da gravidade, escreve-se as equações de movimento na forma vetorial. Para o caso particular deste experimento, o movimento a estudar é de uma pequena esfera metálica, num lançamento horizontal. Considera-se que a aceleração é *g* (constante), perpendicular a direção da velocidade inicial, no instante do lançamento.

O movimento do projétil a partir do ponto em que ele deixa a rampa pode ser decomposto como dois movimentos independentes (proposição de Galileu), um paralelo a direção da aceleração (eixo Y) e outro perpendicular a mesma (eixo X). As equações que supostamente descrevem estes movimentos independentes seriam:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \qquad\qquad x = x_0 + v_{0x}t$$

Adotando-se a origem do sistema de referência para a posição na qual a esfera abandona a rampa de lançamento, (neste caso $y_0 = 0$, $x_0 = 0$ e $v_{0y} = 0$), as equações acima ficam simplificadas:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \qquad\qquad x = v_{0x}t$$

Ou eliminando-se *t*:

$$y = \frac{gx^2}{2v_{0x}^2}$$

4. Questionário para estudo:

4.1 Classifique as grandezas seguintes em escalares ou vetoriais: massa, posição, velocidade, aceleração e força. Quais as unidades no SI destas grandezas?

4.2 Escolha uma nova origem em ponto diferente do considerado acima, por exemplo, no ponto O da Figura 1, escreva as equações e obtenha a equação que relaciona *y* e *x*.

4.3 Num lançamento horizontal, o projétil teve seu deslocamento máximo de 56,4 cm, sendo a altura de lançamento de 34,5 cm. Qual a velocidade de lançamento do projétil? Adote o valor para a aceleração da gravidade como $g = 9{,}79\ m/s^2$.

4.4 Considere uma esfera em movimento (Figura 1). As medidas do deslocamento vertical do seu centro de massa são afetadas pelo seu tamanho? E as horizontais?

4.5 A massa da esfera influi no deslocamento máximo do lançamento? Justifique.

5. Método

Usa-se a rampa para produzir na esfera uma velocidade de lançamento horizontal. Quando a esfera é solta de uma mesma posição H sobre a rampa de lançamento, as posições *x* e *y* de sua trajetória podem ser medidas. Para isso são usadas as marcas produzidas pela esfera que atinge uma plataforma móvel na qual é fixa uma folha de carbono sobre uma folha de sulfite. É aconselhável tomar várias medidas para os pares *x*, *y*.

6. Procedimento experimental

6.1 Determinação da velocidade de lançamento

6.1.1 Monte a rampa de lançamento conforme a Figura 1.

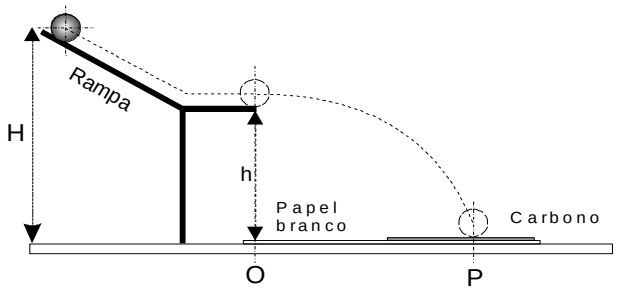


Figura 1 – Esquema da montagem experimental

6.1.2 Escolha um ponto sobre a rampa, a partir do qual você iniciará o experimento e meça a altura *H* dessa posição. Também meça a altura *h*, distância entre o ponto onde a esfera deixa a rampa e a base onde deve se colocado um papel branco.

6.1.3 Defina o sistema de referência e determine o ponto P, de deslocamento máximo da esfera.

6.1.4 Coloque o papel carbono na região onde a esfera atinge a mesa. Faça alguns lançamentos. Meça a distância OP. Anote os dados na Tabela 1.

6.1.5 Repita o mesmo procedimento para a outra esfera.

6.1.6 Calcule a velocidade com que cada esfera abandona a rampa.

Tabela 1 – Determinação da velocidade de lançamento.

Esfera	Deslocamento 1	Deslocamento 2	Deslocamento 3	Deslocamento médio	Vel. de lançamento
1					
2					

6.2 Obtenção da trajetória

6.2.1 Escolha uma das esferas para os próximos passos. Justifique a escolha.

6.2.2 Escolha seis posições diferentes x_i ao longo do segmento OP, para posicionar o anteparo. Coloque um papel branco e carbono sobre o anteparo.

6.2.3 Coloque o anteparo na primeira posição. Lance algumas vezes esfera da mesma altura *H*. Repita este procedimento para outras posições do anteparo.

6.2.4 Retire o papel carbono e faça as medidas das posições yi correspondentes, preenchendo a Tabela 2.

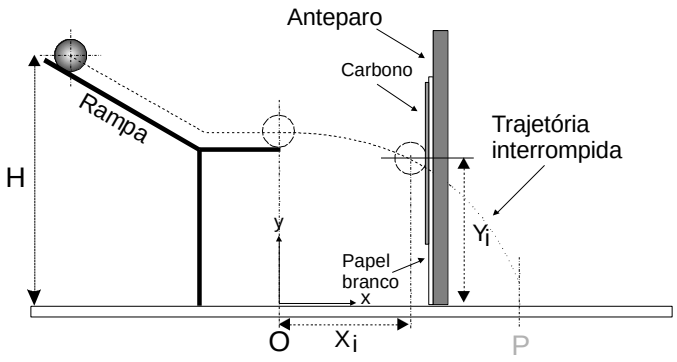


Figura 2 – Esquema da montagem experimental.

Tabela 2 – Determinação da trajetória.

5		
6		

Lançamento	x_i ( )	y_i ( )
1		
2		
3		
4		

7. Análise experimental

7.1 Os deslocamentos das duas esferas foram os mesmos? Por quê?

7.2 Faça um gráfico da altura *y* versus *x*, tomando como origem o ponto O, na Figura 1, (Gráfico 1).

7.3 Linearize o gráfico 1. Este gráfico linearizado será denominado gráfico 2.

7.4 Determine a velocidade da esfera no instante em que ela deixa a rampa, usando os resultados obtidos do gráfico 2 (interpretação do coeficiente angular). Qual o significado do coeficiente linear obtido?

7.5 Determine a velocidade vetorial para a esfera, no instante $t = 0{,}01$s.

7.6 Use outro método para determinar a velocidade da esfera ao deixar a rampa. Compare com o valor obtido usando a cinemática. Discuta estes resultados.

8. Bibliografia

Fundamental

- Física – P. Tipler, vol. 1, 1994.

Complementar

- Física; Sears, Zemansky e Young; Vol. 1; Seção: 5-5,1990
- Curso de Física Básica – Mecânica; H. M. Nussenzveig; Vol 1, 2002

12. Equilíbrio de Forças

1. Objetivos

- Determinar analiticamente e graficamente a resultante de um sistema de forças (experimento 1).
- Verificar validade da expressão para a resultante de duas forças concorrentes (experimento 2).

2. Objetivos Específicos

- Identificação de grandezas vetoriais. Operações com vetores
- Determinação de módulo, direção e sentido de um vetor.
- Comprovar a condição de equilíbrio $\sum \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$.

Experimento 1 – <u>Estudo analítico e gráfico da resultante de forças</u>

3. Material

Placa de experimento imantada, dinamômetro, 3 polias, escala circular em graus, 2 suportes com massa, fio, anel indicador, papel e transferidor.

4. Método

Um conjunto de roldanas posicionadas sobre uma placa, juntamente com dinamômetro emassas aferidas, permite analisar a condição de equilíbrio.

5. Questionário para estudo

5.1 Qual a diferença entre uma grandeza vetorial e uma grandeza escalar?

5.2 Sabendo-se que o corpo 1 exerce uma força F_{12} sobre o corpo 2, qual a direção e sentido da força que o corpo 2 exerce sobre o corpo 1?

5.3 Quais os métodos para determinação da força resultante de um sistema de forças que atuam sobre um corpo? Descreva-os.

5.4 Qual a condição de equilíbrio de translação de um corpo?

5.5 Faça o diagrama de forças atuando nas roldanas, no dinamômetro e no ponto O, da Figura 1.

5.6 Enuncie a lei de Hooke. Esta lei é válida para qualquer deformação de uma mola?

5.7 Quais os conceitos físicos básicos envolvidos neste experimento?

6. Procedimento Experimental 1

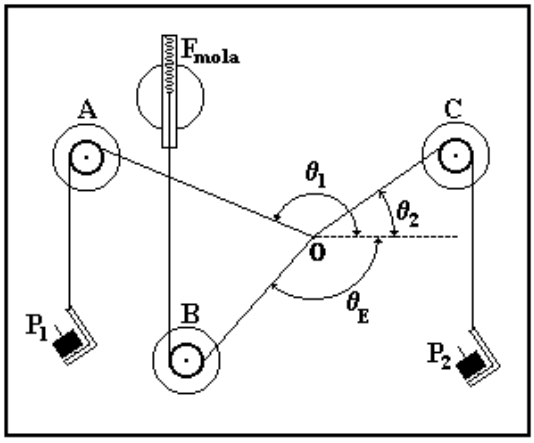


Figura 1 – Esquema da montagem Experimental

6.1 Monte o equipamento conforme a figura abaixo, ou num outro arranjo que você desejar, verificando se a base magnética está na vertical.

6.2 Meça as massas M_1 e M_2, não se esquecendo de levar em conta a massa do suporte. Coloque as massas M_1 e M_2 nos suportes.

6.3 Verifique se o dinamômetro e a roldana B estão verticalmente alinhados.

6.4 Centralize o transferidor no ponto O, alinhando o prumo com um dos eixos.

6.5 Faça a leitura dos ângulos θ_1, θ_2, e θ_E, anotando na Tabela 1.

6.6 Faça a leitura da escala do dinamômetro, F_{mola} (escala N) e da deformação da mola Δx (escala mm).

6.7 Repita o mesmo procedimento anterior para diferentes massas M_1 e M_2 (3 vezes). Anote os dados experimentais na Tabela 1. Observe que F_E é a força oposta a resultante de F_1 e F_2 no ponto O.

Tabela 1: Dados coletados em diferentes configurações.

Sit.	M_1 ( )	M_2 ( )	F_1 ( )	F_2 ( )	θ_1 ( )	θ_2 ( )	θ_E ( )	Δx ( )	F_m ( )	F_E ( )
01										
02										
03										

7. Análise dos dados experimentais 1

Escolha um dos conjuntos de dados experimentais acima para fazer a análise.

7.1 Determine o módulo das forças que M_1 e M_2 exercem (força peso) sobre as roldanas A e C, respectivamente.

7.2 Use os módulos de F_1 e F_2 e os valores medidos para θ_1 e θ_2 para representar os vetores F_1 e F_2 numa folha de papel (escolha uma escala conveniente para os módulos das forças)

7.3 Encontre o módulo e a direção da força F_E, oposta a resultante das forças F_1 e F_2 através do método gráfico.

7.4 Compare o valor do módulo de F_E com aquele medido por você diretamente através do dinamômetro (F_m) e transferidor.

7.5 Escreva F_1, F_2 e F_m na forma vetorial: $F = F_X\,\mathbf{i} + F_Y\,\mathbf{j}$.

7.6 Determine o vetor soma ($\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$) através do método analítico. Compare com o obtido graficamente.

7.7 Compare este valor de F_E com aquele obtido no dinamômetro.

7.8 Qual o erro percentual encontrado nos itens 7.3 e 7.6, com relação a força tomada como referência F_m?

7.9 O ponto O do diagrama está sempre na mesma posição para um mesmo conjunto de forças, posições das roldanas e dinamômetro? Se você tirar o conjunto da posição de equilíbrio, o ponto O, volta a posição anterior? Esta constatação inviabiliza a verificação da lei de equilíbrio estático?

7.10 Determine a constante elástica da mola.

Experimento 2 – <u>Análise da resultante de forças concorrentes</u>

Para atender o segundo objetivo, posicione duas roldanas como indicado na fig 2. Vamos analisar a condição quando duas forças concorrentes f_1 e f_2 são equilibradas por uma força F_R. Se f_1 e f_2 são os módulos das forças devido às massas M_1 e M_2 presas nas extremidades dos fios, o módulo da resultante é dado por:

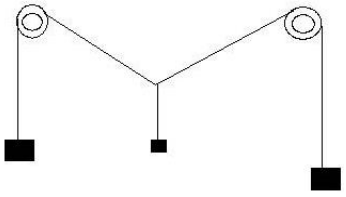


Figura 2: esquema da montagem experimental

$$R = (f_1^2 + f_2^2 + 2f_1 f_2 \cos\alpha)^{1/2}$$

Onde α é o ângulo entre as direções das forças. Para o caso de massas iguais nas extremidades tem-se que as forças também são iguais ($f_1 = f_2 = f$), a expressão anterior fica:

$$R = [2f^2(1 + \cos\alpha)]^{1/2}$$

Colocando em outra forma:

$$\cos\alpha = \frac{R^2}{2f^2} - 1$$

8. Procedimento Experimental 2

8.1 Monte um arranjo experimental como indicado na figura 2.

8.2 Determine as massas dos 2 suportes antes de fixá-los nos extremos do cordão.

8.3 Adicione entre 50 e 100 gramas aos suportes, lembre-se da sugestão de massas iguais.

8.4 Próximo ao meio do cordão coloque o terceiro suporte. Determine o ângulo, usando um transferidor. Anote este valor. Afaste ligeiramente o suporte central da condição de equilíbrio e deixe-o voltar novamente a ela. Meça outra vez o ângulo. Repita o procedimento, anote o ângulo.

8.5 Adicione massas ao suporte do meio e anotes seus valores. Meça o ângulo α de modo semelhante ao anterior.

8.6 Repita o processo adicionando outras massas no suporte central.

Tabela 2: Dados coletados em diferentes configurações.

N	*R* ( )	α_1	α_2	α_3	α_4	$\alpha_{médio}$	cos (α)	R^2 ( )
1								
2								
3								
4								
5								

8.7 Faça um gráfico de cos($\alpha_{médio}$) versus R^2.

8.8 Ajuste uma reta pelos pontos experimentais. Determine os coeficientes angular e linear. Dê a interpretação dos resultados.

9. Análise dos dados experimentais.

9.1 Por que a escolha do gráfico cos $(\bar{\alpha}) \times R^2$?

9.2 Qual o significado dos coeficientes angular e linear?

9.3 Quais as possíveis causas das dispersões dos dados experimentais?

9.4 Como é possível estimar o atrito presente nas roldanas? Como ficaria a equação se o atrito presente nas roldanas for levado em consideração?

10. Bibliografia

Fundamental

- Fundamentos de Física. D. Halliday and R. Resnick, Vol. 1 e 2, 4a Ed., Cap. 3 – Seções 1 a 5; Cap.5, Seções 1 a 8. Capítulo 13, Vol 2, (1994).
- Física – P. Tipler, Vol. 1

Complementar

- Física. F. Sears, M.W. Zemansky e H.D. Young, Vol 1, Cap. 1 – Seção 1-7. Cap. 2 – Seção 1-7, (1983).
- Física – Fundamentos e Aplicações; R.M. Eisberg, L.S. Lerner, Vol. 1, Cap. 1 – Seção 1-7, Cap. 2- Seção1-7, (1983).

13. Força Centrípeta

1. Objetivo

Determinar o módulo da força centrípeta no movimento circular.

2. Material

Plataforma rotacional, base para plataforma rotacional, acessórios de força centrípeta, cronômetro com sensor óptico, nível e balança.

3. Método

Um corpo é colocado em movimento circular uniforme. A força que mantém este corpo em movimento é determinada diretamente e comparada com a previsão da dinâmica.

4. Questionário para estudo

4.1 Considere um corpo de massa m sobre uma superfície sem atrito como mostra a Figura 1. Considerando que o corpo está em equilíbrio estático:

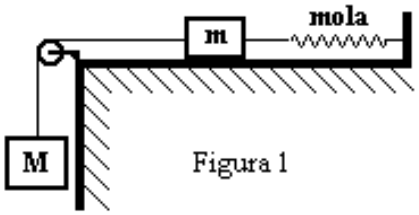


Figura 1

a) Faça o diagrama de forças para os corpos de massa *m* e *M*;

b) Determine a expressão da constante elástica em função da massa do corpo suspenso.

4.2 Um disco gira a 33 rpm. Qual o período do movimento e qual sua velocidade angular em rad/s?

4.3 Considere um corpo de massa M em movimento circular uniforme no plano horizontal conforme a Figura 2. Sendo v a sua velocidade, determine:

a) o período do movimento;

b) a velocidade angular;

c) a aceleração centrípeta.

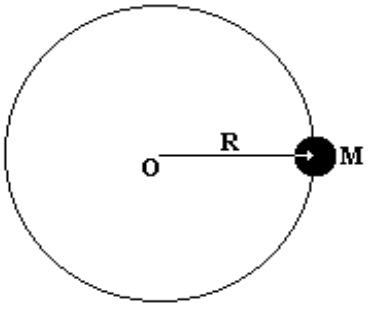


Figura 2 – Trajetória circular.

4.4 O corpo de massa *M* na Figura 2 está preso por um fio ligado ao pino situado no ponto O e sobre uma superfície horizontal sem atrito. Considerando que o corpo realiza movimento circular uniforme:

a) Faça o diagrama de forças, mostrando as forças horizontais e verticais atuantes sobre o corpo.

b) Sendo a aceleração do corpo dada por v^2/R, qual o valor da força resultante?

c) Qual é o módulo da força de tração no fio?

5. Procedimento Experimental

Para um corpo realizar movimento circular é necessário que atue sobre ele uma força centrípeta. Isto se aplica a todos os corpos unidos a uma plataforma rotacional.

5.1 Observe o esquema da figura 3 e meça o valor da massa *M*.

5.2 Monte o equipamento conforme o esquema da Figura 3, observando que:

a) A plataforma deve esta fixada ao tripé ou base de apoio e nivelada;

b) O pilar central deve estar sobre o zero da escala. No pilar central existe um suporte ajustável (que deve estar posicionado sobre a marca) onde está fixada uma mola. Na outra extremidade desta mola está preso um disco plástico. Existe também, uma peça ajustável usada como referência, que chamaremos de "base indicadora".

c) O pilar lateral deve estar a uma distância *R* do centro.

d) A massa suspensa *m* não deve ser muito grande para não ultrapassar o limite elástico da mola.

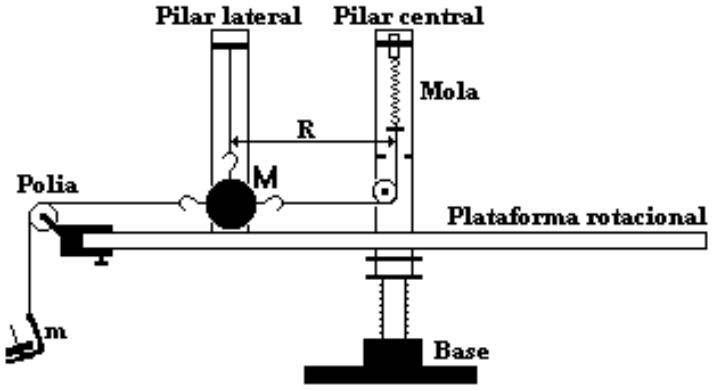


Figura 3 – Esquema de montagem do equipamento

5.3 Meça o valor da massa suspensa *m*.

5.4 Ajuste a posição do pilar lateral de forma que os fios que ligam as massas e a mola fiquem perpendiculares entre si para evitar componentes de força. Anote o valor de *R*.

5.5 Nivele a base indicadora com o disco plástico.

5.6 Retire a massa suspensa e a polia.

5.7 Posicione sensor óptico no modo "**Pend**" e na escala "1 ms".

5.8 Gire a plataforma com a mão até o disco indicador estar novamente nivelado com a base indicadora. Nesta situação as forças que agem sobre *M* todas perpendiculares entre si. Procure manter a plataforma rotacional girando a uma velocidade constante e então acione o sensor óptico, pressionando a tecla "**Reset"**. Observe que o intervalo de tempo medido corresponde ao período. Repita três vezes a medida do período.

5.9 Mantendo o raio *R* varie a massa *M* (para mais dois valores diferentes) e repita o procedimento dos passos 5.1 a 5.8, anotando os dados na Tabela 1.

5.10 Com o objetivo de alterar *R* troque a massa suspensa (ajuste novamente a posição de equilíbrio) e repita o procedimento dos passos 5.1 a 5.8, para um único valor da massa *M*.

Tabela 1: Dados experimentais

Raio ( )	*m* ( )	*M* ( )	Período ( )	Período Médio ( )	Força Centrípeta ( )	Força da Mola ( )

6. Análise de dados experimentais

6.1 Calcule o módulo da força exercida pela mola para o equilíbrio estático.

6.2 Calcule a velocidade angular da massa *M*.

6.3 Calcule o módulo da força centrípeta e compare com o módulo da força exercida pela mola.

6.4 Dentro dos erros experimentais as forças encontradas são iguais? Por quê?

6.5 Quais os fatores que contribuem para o aparecimento desta diferença?

7. Bibliografia

Fundamental

- Fundamentos de Física; Halliday Resnick; Vol. 1, Cap. 6, seção 6-4; Cap. 11, seção 1-6.
- Física, P. Tipler, Vol.1, Cap. 3,4 e 5, 3a edição, 1995.

Complementar

- Física; Sears, Zemansky e Young; Vol. 1.
- Física Fundamentos e Aplicações; Eisenberg, Lerner; Vol 1; Cap. 6, seção 2.

14. Conservação de Energia Mecânica

1. Objetivo

Determinar experimentalmente a energia cinética de translação e energia cinética de rotação de corpos rígidos, comprovar o principio de conservação de energia mecânica e analisar o movimento de um corpo rígido num plano inclinado com atrito.

2. Material

Cronômetro, plano inclinado, peças metálicas cilíndricas e régua.

3. Roteiro de estudo

Neste experimento certos corpos cilíndricos rolarão sem deslizamento sobre uma rampa, como ilustrado na figura 1. Portanto estarão envolvidos os movimentos de translação e rotação.

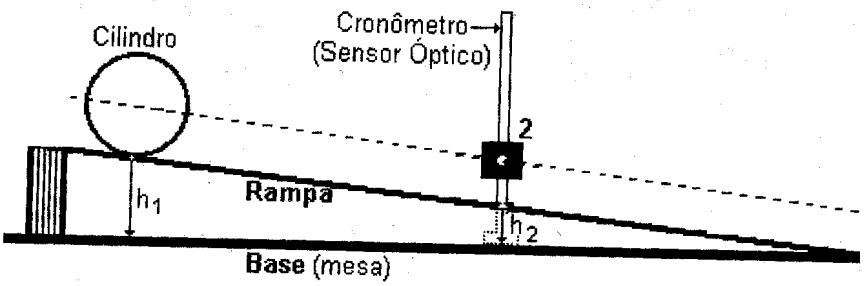


Figura 1. Esquema da montagem experimental

3.1 Para se determinar a energia potencial gravitacional é necessário um referencial de energia? Se a resposta for afirmativa, ilustre uma situação através de uma figura.

3.2 Qual é a expressão para a variação da energia potencial de um corpo rolando numa rampa (figura1) entre a referência de largada e o sensor óptico?

3.3 Qual é a relação matemática entre o módulo v da velocidade de translação do centro de massa e a velocidade angular ω, para corpos que rolam sem deslizar? Identifique todas as grandezas envolvidas.

3.4 Qual a expressão para a energia cinética de translação de um corpo? E para a de rotação?

3.5 Escreva a expressão literal do momento de inércia de um cilindro maciço e um cilindro oco em relação a um eixo de rotação que passe pelo centro de massa.

3.6 O que afirma o princípio de conservação de energia mecânica?

4. Procedimento experimental

Os cilindros irão rolar pela rampa e devem passar pelo sensor óptico sem tocá-lo. Este sensor óptico dispara o cronômetro quando o feixe luminoso é interrompido (LED apagado) e trava o cronômetro quando o receptor detecta o feixe de luz novamente (LED acesso). Portanto o cronômetro é acionado durante a passagem do corpo entre o emissor e o receptor de luz. Observe que a luz do LED do sensor óptico está apagada, quando o cronômetro está medindo o tempo.

4.1 Meça a massa e os raios, externo (R_e) e interno, dos cilindros e anote na tabela 1.

4.2 Posicione o sensor óptico conforme a linha de referência, isto é, no centro geométrico do cilindro (linha tracejada) da figura1.

4.3 A distância entre a posição de largada dos cilindros e o sensor não deve ser inferior a 50 cm

4.4 Meça a diferença $\Delta h = h_1 - h_2$ entre as alturas da base a rampa na posição de largada e na posição do sensor (figura 1).

$$\boldsymbol{\Delta h = h_1 - h_2 =} _____$$

Tabela 1. Massas, raios e tempos

Cilindro	Massa ( )	Raios ( )	T ( )	T_{med} ( )
Maciço		R_e =		
Oco 1		R_e = R_i =		
Oco 2		R_e = R_i =		

4.5 Posicione a chave de escala de tempo do sensor óptico na escala de 0,1 ms e a outra chave na posição "**gate**" quando for medir o tempo do cilindro maciço. Para os cilindros vazados posicione a chave no modo "**pulse**". Zere ao cronômetro pressionando o botão vermelho.

4.6 Com muito cuidado, posicione o corpo de tal forma que ele role pela rampa passando pelo sensor sem tocá-lo. Faça testes antes de começar a obter os dados.

4.7 Faça a coleta dos dados experimentais, medindo 4 vezes o tempo de passagem para cada cilindro.

5. Análise de dados experimentais

5.1 Preencha a tabela 2 usando as fórmulas do roteiro de estudo. Para o cálculo da velocidade v, use o tempo médio de passagem do cilindro pelo sensor. Atenção para o caso dos cilindros vazados!!!

5.2 Calcule a energia cinética de translação K_T, a de rotação K_R e a energia cinética total do corpo na posição do sensor.

5.3 Calcule a variação da energia potencial ΔU entre a posição de largada e a da passagem pelo sensor óptico.

5.4 Calcule o erro relativo percentual $\Delta\%$ entre K e ΔU; use ΔU como referência.

Tabela 2. Análise do movimento

Grandeza	Maciço	Oco 1	Oco 2
I ( )			
v ( )			
ω ( )			
K_t ( )			
K_r ( )			
K ( )			
ΔU ( )			
Δ%			

5.5 Explique porque na determinação da velocidade de translação foi suposto um movimento retilíneo uniforme, embora o rolamento na rampa seja um movimento acelerado.

5.6 É necessário que o sensor óptico esteja a mesma altura, em relação a rampa, que o eixo central do corpo? Ou poderia estar a qualquer altura, desde que interrompesse a passagem do feixe luminoso e, consequentemente, haveria uma medida de intervalo de tempo? Justifique.

5.7 A energia cinética de rotação é importante quando comparada com a energia cinética de translação? Qual a proporção K_R / K_T?

5.8 Deveria haver conservação de energia mecânica? O resultado experimental está de acordo com a sua expectativa teórica?

5.9 Há atrito relevante no movimento? Se houver, qual sua influência sobre a energia mecânica?

5.10 Este experimento poderia ser utilizado para medir o momento de inércia dos corpos? Se a resposta for afirmativa, como você procederia? Se for negativa justifique.

6. Bibliografia

- "Física", Tipler P., 3ª ed., Editora LTC Ltda, Rio de Janeiro (1993), vol 1, cap.6 seções 5-8, cap 8, seções 1-4.
- "Fundamentos de física" Halliday D e Resnick R., 3ª ed Editora LTC Ltda Rio de Janeiro (1994), vol 1, cap 7,8,11,12.
- "Física-fundamentações e aplicações"; Eisberg R.M. e Lerner L.S., vol 1, cap 7,9 e 10.

15. Colisões em uma dimensão

1. Objetivo

Verificação experimental das leis de conservação do momento linear (quantidade de movimento) e da energia cinética.

2. Material

Trilho de ar e insuflador, computador com interface, dois sensores ópticos, dois carros e respectivos acessórios, massas e balança eletrônica.

3. Questionário para estudo

3.1 O que representa o Centro de Massa de um corpo? E de um sistema de *n*-corpos?

3.2 Qual a definição de momento linear de um corpo? E de um sistema de *n*-corpos?

3.3 Como aplicar a Segunda Lei de Newton a um sistema de vários corpos em função do Momento Linear?

3.4 O que diz o princípio de Conservação de Momento Linear? Quando ele pode ser aplicado?

3.5 Como podemos definir Colisão dentro da Física?

3.6 O que diferencia uma colisão elástica de uma inelástica?

3.7 Independente do tipo de colisão, qual é a grandeza física que sempre se mantém constante? Por que isto ocorre?

3.8 Considere dois corpos sobre um trilho de ar, um em repouso (alvo) e outro em movimento (projétil). O projétil se desloca em direção ao alvo com velocidade constante v_1. Deduza as expressões gerais para as velocidades finais dos dois corpos após uma colisão elástica entre eles.

3.9 Particularize esta situação para corpos com massas iguais.

3.10 Repita o item 3.8 para uma colisão completamente inelástica.

4. Procedimento experimental

4.1 <u>Operações Iniciais</u>

4.1.1 Verifique se todos os cabos dos sensores estão conectados na interface e se a mesma está ligada e conectada ao computador.

4.1.2 No computador dê um duplo click no ícone do programa Data Studio. Abra o arquivo colisões.

4.1.3 Verifique o funcionamento dos sensores e posicione-os.

4.2 Aquisição de dados

A figura 1 mostra o arranjo experimental. Sobre o trilho são colocados os dois carros e os dois sensores. Quando um carro passar por um sensor ótico, este acionará o cronômetro do computador enquanto o feixe estiver bloqueado por uma pequena bandeira, de comprimento *l*, colocada na parte superior do carro. Uma vez conhecido o tempo que esta bandeira leva para atravessar o sensor pode-se determinar a velocidade do carro. A prática consiste em fazer o carro 1 colidir com o carro 2, que se encontra em repouso e determinar as velocidades de cada carro antes e depois da colisão.

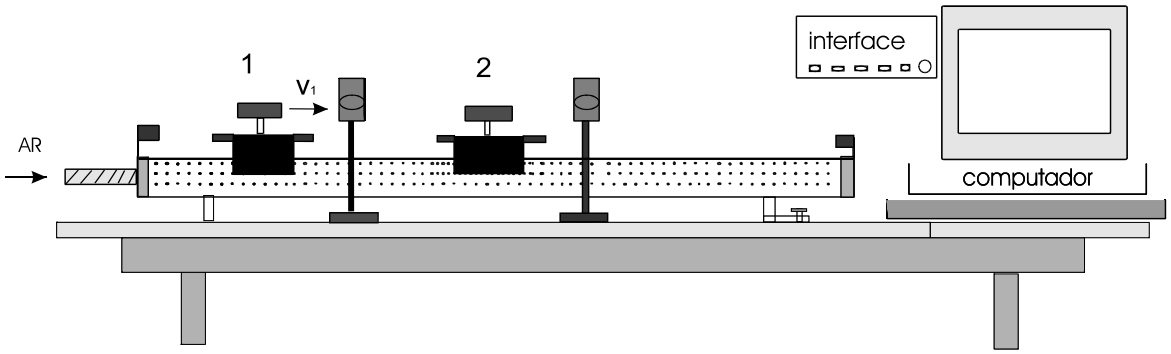


Figura 1 – Esquema da montagem experimental.

4.3 Colisão elástica

4.3.1 Certifique-se de que a fonte de ar esteja ligada na posição 3,5bar.

4.3.2 Determine a massa de cada carro, coloque-os sobre o trilho e ajuste os sensores de acordo com a figura 1.

4.3.3 Observe o comprimento do carro para posicionar o sensor, evitando assim que após a colisão o carro eventualmente fique parado justamente no sensor, inviabilizando a medição do intervalo de tempo. Ajuste também a altura do sensor.

4.3.4 No programa click em configurar. Na aba "**constantes**" digite o valor correspondente a largura da "bandeira" no campo comprimento do objeto.

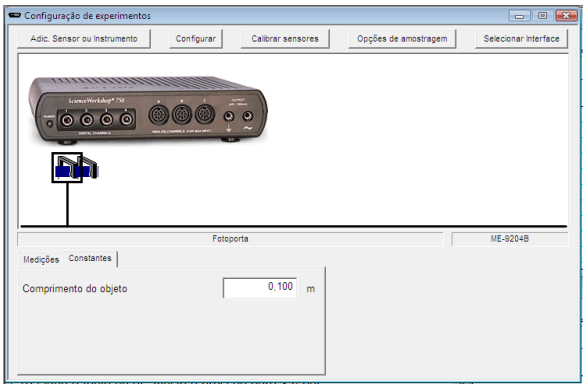


Figura 2 – Tela de configuração do programa Data Studio.

4.3.5 No programa, click no botão INICIAR. Iniciando a contagem do cronometro, porém, os tempos medidos serão considerados apenas na passagem carrinhos pelos sensores.

4.3.6 Impulsione adequadamente o carro 1 contra o carro 2. (Baixas velocidades são mais adequadas).

4.3.7 Após os dois carros colidirem e passarem pelos sensores posicione novamente os carros para novas medidas. Não é necessário pressionar a tecla pare, o cronômetro fica funcionando normalmente, mas o tempo só será tomado com a passagem dos carros pelos sensores.

4.3.8 Preencha a tabela 1 com os valores obtidos. Para o cálculo da velocidade utilize o valor do comprimento da bandeira.

4.3.9 Repita este procedimento variando as massas dos carrinhos.

Tabela 1: Coleta dos dados experimentais para colisões elásticas.

Colisão	m_1( )	m_2 ( )	v_{1i} ( )	v_{2i} ( )	v_{1f} ( )	v_{2f} ( )
01						
02						
03						

4.4 <u>Colisão inelástica</u>

4.4.1 Troque os acessórios dos carros por um conjunto agulha-cilindro com massa de modelar para que após a colisão os carros permaneçam unidos.

4.4.2 Repita os procedimentos realizados para o caso da colisão elástica. Preencha a tabela 1.

Gravação de Dados (Opcional): Após a prática, pressione PARE para parar o cronômetro. No menu superior click em arquivo e em seguida click em exportar dados. Os arquivos são salvos em formato .txt.

Tabela 2: Coleta dos dados experimentais para colisões inelásticas.

Colisão	m_1 ( )	m_2 ( )	v_{1i} ( )	v_{2i} ( )	v_{1f} ( )	v_{2f} ( )
01						
02						
03						

5. Análise dos Dados Experimentais

5.1 Calcule os momentos lineares iniciais p_i, os finais p_f, os totais P_i e P_f e também o erro percentual ($\Delta P/P_i$, onde ΔP é a diferença entre P_i e P_f,) preenchendo as Tabela 3 e 4.

Tabela 3: Cálculo dos momentos lineares para colisões elásticas.

Colisão	p_{1i} ( )	p_{2i} ( )	P_i ( )	p_{1f} ( )	p_{2f} ( )	P_f ( )	$\Delta P/P_i \cdot 100\%$
01							
02							
03							

Tabela 4: Cálculo dos momentos lineares para colisões inelásticas.

Colisão	p_{1i} ( )	p_{2i} ( )	P_i ( )	p_{1f} ( )	p_{2f} ( )	P_f ( )	$\Delta P/P_i \cdot 100\%$
01							
02							
03							

1.1 Calcule as energias cinéticas iniciais K_i, finais K_f, totais K_i e K_f e também o erro percentual ($\Delta K/K_i$, onde ΔK é a diferença entre K_i e K_f,) preenchendo as Tabelas 5 e 6.

Tabela 5: Cálculo das energias cinéticas para colisões elásticas.

Colisão	K_{1i} ( )	K_{2i} ( )	K_i ( )	K_{1f} ( )	K_{2f} ( )	K_f ( )	$\Delta K/K_i \cdot 100\%$
01							
02							
03							

Tabela 6: Cálculo das energias cinéticas para colisões inelásticas.

Colisão	K_{1i} ( )	K_{2i} ( )	K_i ( )	K_{1f}' ( )	K_{2f} ( )	K_f ( )	$\Delta K/K_i \cdot 100\%$
01							
02							
03							

1.2 Determine a velocidade do centro de massa do sistema formado pelos dois carros antes e depois da colisão para cada situação. Discuta estes valores.

1.3 Determine as velocidades relativas de cada carrinho com relação ao centro de massa do sistema. Discuta estes valores.

1.4 Com base nas Tabelas 3 e 4, houve conservação de momento linear em todas as colisões?

1.5 Com base nas Tabelas 5 e 6, houve conservação de energia cinética em todas as colisões?

1.6 Calcule a energia cinética de cada carrinho com relação ao centro de massa. Houve conservação de energia cinética em todas as colisões? Discuta os resultados.

2. Bibliografia

Fundamental

- Fundamentos de Física; D. Halliday and R. Resnick, Vol. 1, Cap. 09, Seções: 1-6, Cap. 10, Secções 10.1 a 10.4, (1994).
- Física: P. Tipler, Vol. 1, Cap. 7, 3a edição, (1995).

Complementar

- Física – Fundamentos e Aplicações. R.M. Eisberg, L.S. Lerner, Vol. 1, (983); Capítulo: 2, Seções: 1 a 7. Capítulo: 4 – Seções: 1 a 6. Capítulo: 5 – Seções: 1 e 3.

16. Impulso de uma Força

1. Objetivo

Verificação experimental do Teorema Impulso-Momento Linear.

2. Objetivos Específicos

- Determinação da variação do momento linear de um corpo durante uma colisão.
- Obtenção da força interna $F(t)$ que age durante a colisão.
- Determinação do valor médio da força $F(t)$.
- Determinação do tempo de colisão Δt.

3. Material

Trilho de ar, insuflador, carro e respectivos acessórios, computador com interface, sensor de posição, massas aferidas, balança eletrônica, garras, haste metálica, cabos e fonte de energia.

4. Método

Nesta experiência utiliza-se o material do conjunto PASCO para avaliar a troca de forças internas ocorridas durante uma colisão em uma dimensão. Um dos corpos é um carrinho com velocidade sobre o trilho de ar, o outro um corpo em repouso é o próprio transdutor de força.

5. Questionário para estudo

5.1 Em uma colisão entre 2 corpos consideramos apenas as forças internas que atuam durante este evento. Represente estas forças na figura 1, que mostra uma colisão frontal entre 2 corpos.

5.2 Qual a relação entre a força que o corpo 1 exerce em 2 e a força que o corpo 2 exerce em 1?

5.3 Como expressar a Segunda Lei de Newton em função do momento linear?

5.4 Obtenha o Teorema do Impulso-Momento Linear para um dos corpos da figura 1, a partir da aplicação da Segunda Lei de Newton.

5.5 Com base neste teorema, o que representa a variação do momento linear de um corpo durante a colisão?

5.6 Qual a unidade de Impulso no SI?

5.7 Se durante um intervalo de tempo Δt = 0,087 s agir sobre um corpo uma força média de 23,5 N devida a uma colisão, determine o impulso desta força.

5.8 Se um carro de massa m = 0,880 kg e com velocidade 2,4 m/s colidir com uma parede e recuar a uma velocidade de 1,1 m/s, qual será o impulso que atuou sobre ele?

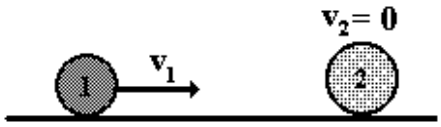


Figura 1. Colisão Frontal de Dois Corpos

6. Descrição do experimento

A figura 2 mostra o arranjo experimental. O sensor de posição, fixado a um suporte, é colocado sobre o trilho, aproximadamente na sua metade. É importante observar que sensor e trilho estejam alinhados. Sobre o trilho é colocado um carro, de massa *m*, com a face da bandeira paralela ao sensor. Verifique a altura do sensor: este deve ficar no mesmo nível da bandeira. Em uma das extremidades do trilho está posicionado o transdutor de força, um aparelho que converte, quando corretamente calibrado, diferenças de potenciais elétricos em força. A prática consiste em fazer o carro colidir com o transdutor de força e coletar as seguintes informações: o deslocamento do carro e a força como função do tempo. Com base nestas informações, determina-se a velocidade antes e após a colisão e verifica-se então o Teorema do Impulso-Momento Linear.

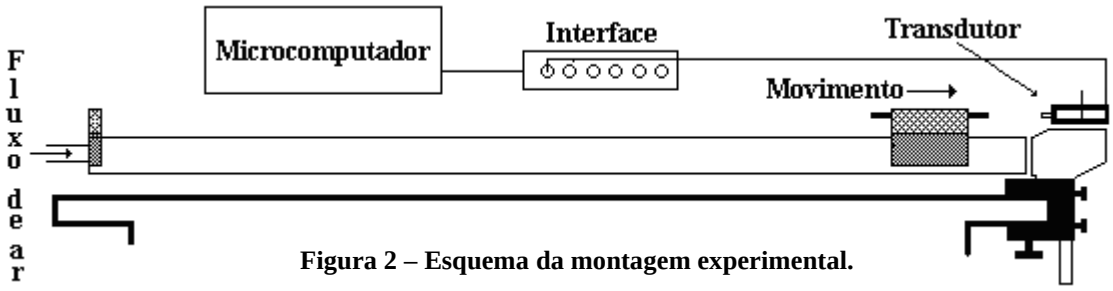


Figura 2 – Esquema da montagem experimental.

7. Procedimento experimental

7.1 Operações Iniciais

7.1.1. Posicione na extremidade da mesa o suporte e o transdutor de força. Verifique para que o mesmo fique na horizontal alinhado e na mesma altura do batente do carrinho.

7.1.2. Conecte o cabo do transdutor de força ao canal analógico A da interface.

7.1.3. Ligue o sensor de movimento na interface. O cabo com a ponta amarela no canal 2 e o cabo com a ponta preta no canal 3.

7.1.4. Ligue o computador e pressione o botão I/O para energizar a interface.

7.1.5. No Desktop do Windows acesse o programa Data Studio. Na janela, click em abrir uma atividade, encontre a pasta arquivos data Studio e abra o arquivo impulso.sp.

7.1.6. No menu suspenso click em configurar. Abre-se uma janela com a imagem da interface e um ícone mostrando os sensores ligados há esta (todos desabilitados).

7.1.7. Conecte o cabo USB da interface em uma das entradas do computador. Para conectar o sensor click sobre o texto "Clicar e conectar sensor". Quando o sensor estiver conectado, o botão iniciar estará habilitado.

7.2 Calibração do Transdutor de Força

7.2.1. Na janela inicial click no botão Configurar. Na janela que se abre click no botão calibrar sensores. Isso abre a janela para calibrar o transdutor.

7.2.2. Em tipo de calibração selecione a opção de calibração por 2 pontos (ajuste de inclinação e ganho).

7.2.3. Os valores do transdutor já aparecem marcados (-50 N e +50 N). Verifique se nada está forçando o batente de contato do transdutor. O valor da leitura deve mostra algo próximo à zero, porém na fixação do batente o mesmo pode gerar uma pré-carga no transdutor. Para "**zerar**" o equipamento, pressione o botão na lateral do transdutor e está terminada a calibração.

7.3 Coleta de Dados

7.3.1. Posicione o sensor de movimento há uma distância de 1,3 m do transdutor e ajuste a sua altura no mesmo nível da bandeira do carro.

7.3.2. Verifique o nivelamento do trilho de ar e o alinhamento dele com o transdutor.

7.3.3. Certifique-se de que a fonte de ar esteja ligada, na posição 3,5.

7.3.4. Meça a massa do carrinho.

7.3.5. Após determinar a massa do carro, coloque-o sobre o trilho distante uns 30 centímetros do sensor de posição.

7.3.6. Impulsione o carro em direção ao transdutor e clique, na barra de opções do menu, o botão iniciar. Não impulsione o carro com alta velocidade, pois poderá causar danos no transdutor no momento da colisão.

7.3.7. Após a colisão pressione o botão parar depois de um tempo suficiente para coletar a velocidade final.

8. Análise de Dados

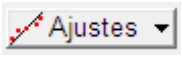
Para facilitar a visualização além das ferramentas de zoom podemos modificar a escala ou movimentar o gráfico.

8.1 Para alterar a escala, movimente o cursor sobre a escala. O cursor modifica sua forma para uma seta dupla. Assim movimentando o cursor para a direita a escala aumenta sua precisão. Movendo o cursor para a esquerda, reduzimos sua precisão.

8.2 Para movimentar o gráfico, movimente o cursor sobre a linha do gráfico. O cursor assume a forma de uma mão permitindo a movimentação pelo gráfico na horizontal ou vertical.

8.3 Para analisar uma determinada região no gráfico, basta clicar em um ponto e arrastar o cursor formando uma janela. A área ficará destacada pronta para que se utilize a opção adequada na barra de ferramentas.

8.4 No gráfico, Força versus Tempo, selecione a área representativa da força no período da colisão. Pressione o botão , selecione as opções área, máximo e mínimo. A área encontrada é numericamente igual ao Impulso.

8.5 Selecionar a área do gráfico, distância versus tempo, que representa a aproximação e afastamento do carrinho durante a colisão. Pressione o botão 

e selecione ajuste linear. Surgirá uma anotação como os melhores valores referentes à inclinação (coeficiente angular, neste caso a velocidade) e o coeficiente linear (velocidade inicial), com os quais se obtêm a equação da velocidade. Com esta função torna-se simples determinar a velocidade antes ou após a colisão.

9. Recomendação

Esta prática se caracteriza pela utilização de um instrumento bastante sensível, o transdutor de força. Considera-se conveniente repetir no mínimo 5 vezes a prática, comparando todos os resultados obtidos. Cada repetição é mostrada na tela com uma cor diferente.

Para tanto, basta a cada tomada de dados, pressionar o botão parar. Os dados são armazenados e ficam visíveis representados em cores diferentes para cada lançamento. Caso algum lançamento tenha de ser descartado, basta selecionar o mesmo e excluí-lo.

10. Análise da Prática

1) Determine a velocidade do carro antes e depois da colisão.
2) Determine o momento linear inicial e final do carro.
3) Determine o impulso devido à força que atua durante a colisão.

4) Verifique o teorema Impulso-Momento Linear.

5) Determine o intervalo de tempo da colisão.

6) Determine a força média que atua durante o intervalo da colisão.

11. Bibliografia

Fundamental

- Fundamentos de Física, D. Halliday and R. Resnick, Vol. 1; Capítulo: 09 - Seção 4; Cap. 10, Seções 1 e 2, (1994).
- Física, P. Tipler, Vol.1, capítulo, 3a edição, (1995).

Complementar

- Física - Fundamentos e Aplicações. R.M. Eisberg, L.S. Lerner, Vol. 1, 1983. Cap.8 – Seção 3.
- Curso de Física de Berkeley. C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, Vol. 1, 1973. Cap. 6.
- Física - F. Sears, M.W. Zemansky, H.D. Young, Vol.1, Cap. 7, Seção 1 - 5. (1983).

17. Colisões Bidimensionais

1. Objetivo

Estudar colisão entre duas partículas e a lei de conservação da quantidade de movimento linear.

2. Material

Rampa de lançamento, esferas de aço com diâmetros aproximados de 10 e 15 mm (duas de cada), hastes para fixação da rampa, fita adesiva, fio de prumo, suporte ajustável para esfera, papel carbono, papel sulfite (preferência papel de impressão 132 colunas), balança, régua.

3. Pré-requisitos

Prática Movimento parabólico usando rampa de lançamento na qual conclui-se que: o movimento da esfera de aço ao longo da horizontal (X) é retilíneo e uniforme, depende apenas da velocidade inicial, isto é, v_x = cte, para qualquer t; o movimento da esfera na vertical (Y) é retilíneo e variado, v_y depende do tempo de queda livre.

4. Introdução

Ler na ref. (1), o capítulo que trata de Colisões, em especial as seções 10.4 e 10.6.

5. Método

Nesta prática usa-se uma rampa de lançamento para dar a esfera (1) velocidade v_{1i}, imediatamente antes de chocar-se com outra esfera (2). Esta (esfera 2) se encontra em repouso sobre o suporte na extremidade da rampa ($v_{2i} = 0$). Após o choque, determinam-se as velocidades v_{1f} e v_{2f} das esferas.

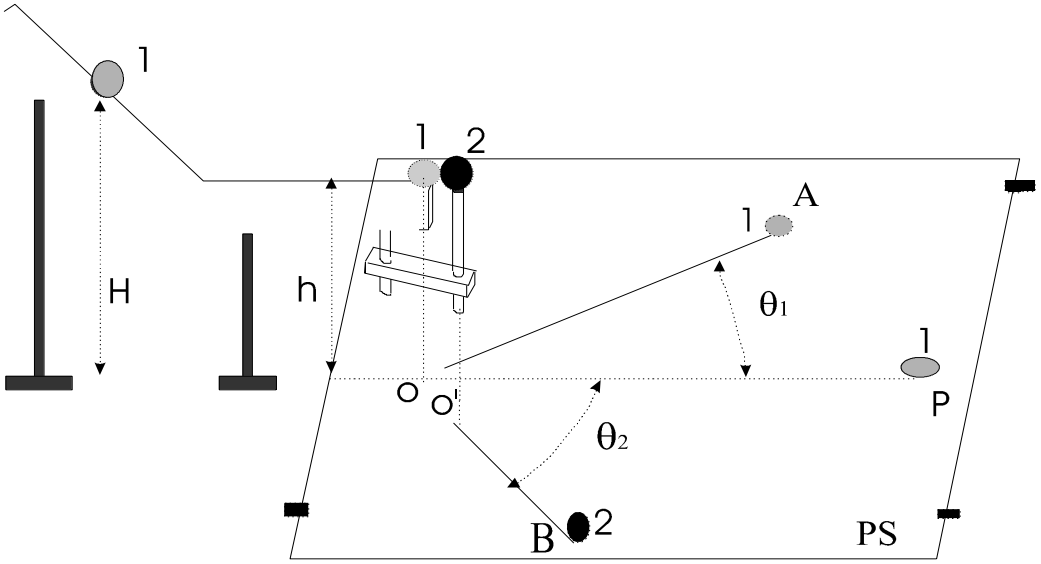
Na figura 1, mostra-se a rampa de lançamento, posições do papel carbono (PC) e papel sulfite (AO), usados para marcar as posições das esferas de aço:

Antes do choque: OP determina direção e módulo da velocidade imediatamente antes colisão da esfera 1.

Após a colisão: OA e O'B determinam as direções e módulos das velocidades das esferas (1) e (2).

A altura (h) da rampa é a mesma para as esferas (1) e (2). Pode ser mostrado que as distâncias OP, OA, O'B, são proporcionais aos módulos das velocidades das esferas, com os mesmos coeficientes

de proporcionalidade, portanto são proporcionais as quantidades de movimento lineares, quando as esferas (1) e (2) tem massas iguais. Faça esse cálculo. Usando-se massas iguais (ou diferentes) faz-se a verificação das leis de conservação, no sistema de referência do laboratório (ou do centro de massa). Para acentuar um caráter inelástico do choque, pode-se colocar sobre a esfera inicialmente em repouso



uma pequena massa colante, de modo que as duas esferas permaneçam juntas após o choque.

Figura 1 – Esboço do arranjo experimental a ser utilizado, mostrando a rampa de lançamento e detalhes para consideração das medidas.

6. Procedimento Experimental

6.1 Choque elástico

6.1.1 Inicialmente utilize esferas de mesma massa. Como mostrado na figura 1, deixe a esfera (1) rolar pela rampa a partir de uma posição *H*. O ponto no qual a esfera (1) deixa a rampa deve ser marcado como a origem O. Faça vários lançamentos. Determine a direção e módulo da velocidade desta esfera quando a mesma deixa a rampa. Determine também sua quantidade de movimento.

6.1.2 Coloque a esfera (2) no suporte, de modo a ter-se inicialmente um choque perto de frontal (quando o parâmetro de impacto $b = 0$). O ponto no qual a esfera (2) está posicionada antes da colisão deve ser marcado como a origem O'. Deixe a esfera (1) rolar pela rampa, (a partir da posição escolhida no item anterior) e colidir com a esfera (2). Registre as marcas destas no papel sobre a mesa, identificando-as como 1 e 2, após o choque. Repita algumas vezes.

6.1.3 Neste ponto, faça uma breve análise dos resultados e identifique as quantidades de movimento antes e após a colisão. Organize seus dados na forma de tabela.

6.1.4 Repita o item anterior para outro parâmetro de impacto ligeiramente diferente. Para um mesmo parâmetro, identifique as posições finais das esferas (1) e (2). Para o mesmo parâmetro de impacto produza pelo menos 3 colisões.

6.1.5 Repita o item anterior trocando uma das esferas por outra com maior diferença de massa (uma mais leve e outra mais pesada, fornecidas na bancada). Em todos os casos registre as respectivas posições O e O'.

6.1.6 Sobre o papel onde estão registrados e numerados os pontos que determinam as velocidades para cada uma das esferas, represente os segmentos de retas que são proporcionais às velocidades (ou a quantidade de movimento), antes e após a colisão. Identifique em cada caso o ângulo de espalhamento e o de recuo θ_1 (no referencial de laboratório).

6.1.7 Identifique as quantidades importantes, tais como: referencial, velocidades antes e após a colisão (vetor), ângulos, componentes dos vetores velocidade sobre os eixos escolhidos, quantidade de movimento antes e após a colisão. Observe atentamente o que aconteceu com as componentes vetoriais da velocidade e quantidade de movimento.

6.2 **Dados Experimentais:**

Antes da Colisão:

Alturas de lançamento: H = _____ e h = _____

Massa da esfera 1 (Projétil): M_1 = _____

Distância OP = _____ Velocidade v_{1i} = _____

(i) Colisão Frontal com massas iguais:

Depois da colisão:

Para a esfera 1:

Distância OA = _____ θ_1 = _____

Velocidade v_{1f} = _____

Para a esfera 2:

Massa da esfera 2 (Alvo): M_2 = _____

Distância O'B = _____ θ_2 = _____

Velocidade v_{2f} = _____

Análise do Momento Linear – Colisão frontal com massas iguais:

Esfera	P_{xi} ( )	P_{xf} ( )	P_{yi} ( )	P_{yf} ( )	$\lvert\vec{P}_{Ti}\rvert$ ( )	$\lvert\vec{P}_{Tf}\rvert$ ( )	$\Delta P/P_{Ti}$ (%)
Projétil (1)							
Alvo (2)							

Análise da Energia Cinética – Colisão frontal com massas iguais:

Esfera	K_i ( )	K_f ( )	K_{Ti} ( )	K_{Tf} ( )	$\Delta K/K_{Ti}$ (%)
Projétil (1)					
Alvo (2)					

(ii) <u>Colisão Obliqua com massas iguais:</u>

Depois da colisão:

Para a esfera 1:

Distância OA = _____ θ_1 = _____

Velocidade v_{1f} = _____

Para a esfera 2:

Massa da esfera 2 (Alvo): M_2 = _____

Distância O'B = _____ θ_2 = _____

Velocidade v_{2f} = _____

Análise do Momento Linear – Colisão obliqua com massas iguais:

Esfera	P_{xi} ( )	P_{xf} ( )	P_{yi} ( )	P_{yf} ( )	$\lvert\vec{P}_{Ti}\rvert$ ( )	$\lvert\vec{P}_{Tf}\rvert$ ( )	$\Delta P/P_{Ti}$ (%)
Projétil (1)							
Alvo (2)							

Análise da Energia Cinética – Colisão obliqua com massas iguais:

Esfera	K_i ( )	K_f ( )	K_{Ti} ( )	K_{Tf} ( )	$\Delta K/K_{Ti}$ (%)
Projétil (1)					
Alvo (2)					

(iii) Colisão Obliqua com massas diferentes:

Antes da Colisão:

Massa da esfera 1 (Projétil): M_1 = _____

Distância OP = _____ Velocidade v_{1i} = _____

Depois da colisão:

Para a esfera 1:

Distância OA = _____ θ_1 = _____

Velocidade v_{1f} = _____

Para a esfera 2:

Massa da esfera 2 (Alvo): M_2 = _____

Distância O'B = _____ θ_2 = _____

Velocidade v_{2f} = _____

Análise do Momento Linear – Colisão obliqua com massas diferentes:

Esfera	P_{xi} ( )	P_{xf} ( )	P_{yi} ( )	P_{yf} ( )	$\lvert\vec{P}_{Ti}\rvert$ ( )	$\lvert\vec{P}_{Tf}\rvert$ ( )	$\Delta P/P_{Ti}$ (%)
Projétil (1)							
Alvo (2)							

Análise da Energia Cinética – Colisão obliqua com massas diferentes:

Esfera	K_i ( )	K_f ( )	K_{Ti} ( )	K_{Tf} ( )	$\Delta K/K_{Ti}$ (%)
Projétil (1)					
Alvo (2)					

Para o caso de uma colisão elástica obliqua com massas diferentes, represente graficamente os vetores em escala e mostre a conservação do momento linear do sistema.

6.2.1 É possível verificar de seus dados experimentais que Δv_1 e Δv_2 (vetores), são sempre paralelos e de sentido contrários? (dentro dos erros experimentais). Em caso afirmativo pode-se representar: $\Delta v_1 = k \cdot \Delta v_2$ onde k tem um significado especial, ele é a razão entre as massas inerciais (M_2/M_1).

6.3 Choque Inelástico

6.3.1 Tente obter uma situação de choque inelástico com duas esferas de **diâmetros iguais**. Para isto coloque uma pequena quantidade de massa de vedação na esfera que se encontra em repouso sobre o suporte, de modo que após o choque elas permaneçam próximas, na situação de choque quase **frontal**.

6.3.2 Determine as componentes das quantidades de movimento das esferas.

6.3.3 Faça análise desses resultados e verifique se há algum tipo de lei de conservação envolvida.

Antes da Colisão:

Alturas de lançamento: H = _____ e h = _____

Massa da esfera 1 (Projétil): M_1 = _____

Distância OP = _____ Velocidade v_{1i} = _____

Depois da colisão:

Para a esfera 1:

Distância OA = _____ θ_1 = _____

Velocidade v_{1f} = _____

Para a esfera 2:

Massa da esfera 2 (Alvo): M_2 = _____

Distância O'B = _____ θ_2 = _____

Velocidade v_{2f} = _____

Análise do Momento Linear – Colisão inelástica frontal com massas iguais:

Esfera	P_{xi} ( )	P_{xf} ( )	P_{yi} ( )	P_{yf} ( )	$\lvert\vec{P}_{Ti}\rvert$ ( )	$\lvert\vec{P}_{Tf}\rvert$ ( )	$\Delta P/P_{Ti}$ (%)
Projétil (1)							
Alvo (2)							

Análise da Energia Cinética – Colisão inelástica frontal com massas iguais:

Esfera	K_i ( )	K_f ( )	K_{Ti} ( )	K_{Tf} ( )	$\Delta K/K_{Ti}$ (%)
Projétil (1)					
Alvo (2)					

7. Questões

1) Use a conservação de energia mecânica para determinar a velocidade com que a esfera deixa a rampa de lançamento. Compare com os resultados obtidos usando apenas conceitos cinemáticos.

2) Seria importante considerar a forma da canaleta da rampa de lançamento? A esfera rolava ou simplesmente transladava sobre o trilho?

3) Quais as características das colisões chamadas de elásticas? E quais das inelásticas?

4) Qual a condição para os ângulos θ_1 e θ_2 quando a colisão é elástica?

5) Dentro dos erros experimentais as colisões estudadas podem ser classificadas como elásticas?

6) Escolha uma das colisões com massas iguais. Faça a soma vetorial graficamente diretamente no papel para verificar a conservação do momento linear. Por que a escolha da condição "massas iguais"?

7) Escolha uma das colisões e determine a posição do centro de massa após a colisão. Aonde ele se localiza? Comente as razões disso.

8) Enumere as conclusões obtidas neste experimento. Comente-as.

8. Bibliografia

- Resnick, R. Halliday D.; Física, vol 1, RJ, LTC (1979).
- Lucie, Pierre; Física Básica - Mecânica - vol 1, RJ, Campus, (1979).
- Kittel, Charles; Curso de Física de Berkeley-Mecânica, vol 1, SP., Edgard Blucher. utilizado na disciplina Física Básica.